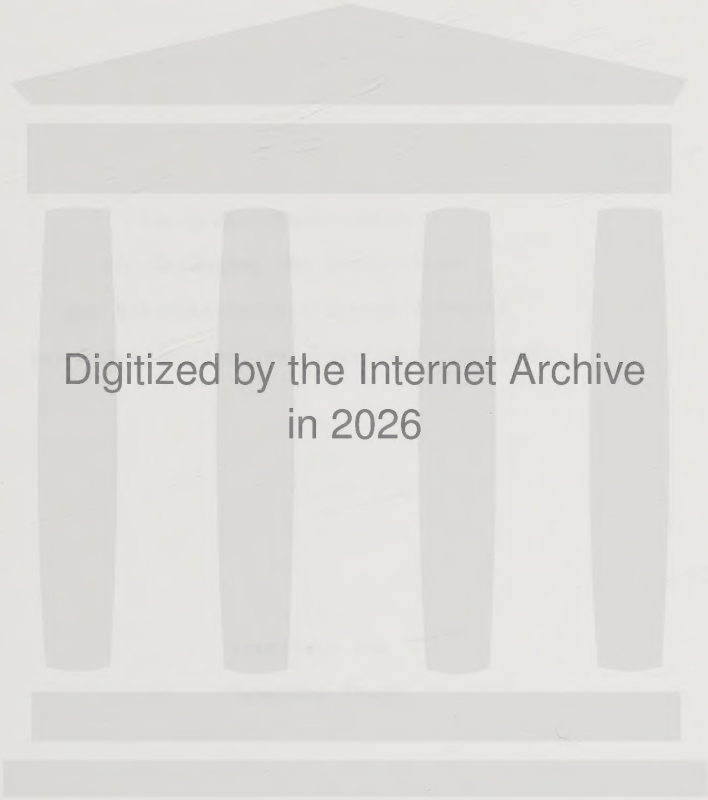
Gruppentheoretische Eigenschaften von lokalen Spinorfeldtheorien im Gitterraum

Hansjörg Frank

1972



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546014_0038

Dissertationsdruck- und Verlagsanstalt
Werner Blasaditsch · 89 Augsburg · Theodor-Heuß-Platz 3 · Tel. (0821) 25563

Gruppentheoretische Eigenschaften von lokalen Spinorfeldtheorien im Gitterraum

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Hansjörg Frank

München
1972

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1. Berichterstatter:	Dozent Dr.F.Wahl
2. Berichterstatter:	Prof.Dr.F.Bopp
Tag der mündlichen Prüfung:	9.2.1972

Inhaltsübersicht

Einleitung: Grundgleichungen und Darstellungen 0

I. Der Wechselwirkungsoperator H_W^B 4

I.A. Das lokale Spektrum von H_W^B 4

I.B. Grundzustandsapproximationen durch Produktansätze 13

II. Grundzustandsapproximationen für die A-Wechselwirkung 37

III. Innere Symmetrien der Gitterraumtheorie mit A-Wechselwirkung 53

IV. Abschätzung der Grundzustandsenergie für große W 73

V. Freie Neutrinos im Gitterraum 97

VI. Zusammenfassung 110

Anhang A 113

Anhang B 119

Anhang C 123

Literatur angabe 128

Grundgleichungen und Darstellungen

Die Gitterraumtheorie[1] stellt einen Versuch dar, die mathematischen Schwierigkeiten der Feldtheorie mit einer radikalen Änderung der Struktur des Ortsraumes zu überwinden, indem man das dreidimensionale Kontinuum durch ein kubisches Gitter ersetzt. Die Gitterpunkte $\vec{n}$ bezeichnet man mit Tripeln von ganzen Zahlen. Ferner soll das Gitter endlich sein, was man dadurch ausdrückt, daß zwei Tripel $\vec{n}$ und $\vec{n}'$, für die gilt:

$$n_i - n_i' = m_i Z \qquad (m_i \text{ ganzzahlig}) \qquad \text{(E1)}$$

den selben Punkt darstellen sollen. Wir können uns deswegen darauf beschränken, daß gilt: $-\frac{Z}{2} < n_i \leq \frac{Z}{2}$. Die Bedingung (E1) wird dafür sorgen, daß wir die Theorie in einem endlich dimensionalen Hilbertraum formulieren können; wenn man will kann man darin auch eine Definition der kosmologischen Eigenschaften des Raumes sehen. Man kann die Gitterpunkte z.B. so physikalisch interpretieren, daß sie Raumzellen repräsentieren sollen, innerhalb derer man die Ortskoordinaten nicht mehr unterscheiden kann. An jedem Punkt des Gitters sind Erzeugungs- und Vernichtsungsoperatoren

$$\psi^+_\mu(\vec{n}) \qquad \text{und} \qquad \psi_\mu(\vec{n}) \qquad \mu = 1,2,3,4 \qquad \text{(E2)}$$

definiert, die den Vertauschungsrelationen

$$\{\psi_\mu(\vec{n}), \psi_\nu(\vec{n}')\}_+ = \{\psi^+_\mu(\vec{n}), \psi^+_\nu(\vec{n}')\}_+ = 0\,; \quad \{\psi^+_\mu(\vec{n}), \psi_\nu(\vec{n}')\}_+ = \delta(\vec{n},\vec{n}')\delta_{\mu\nu} \qquad \text{(E3)}$$

genügen sollen. Der Zustand $|0\rangle$ sei durch

$$\psi_\nu(\vec{n})|0\rangle = 0\,; \qquad \text{für alle } \vec{n}, \nu \qquad \text{(E4)}$$

definiert. Durch Anwendung von Erzeugungsoperatoren bzw. Produkten von solchen auf $|0\rangle$ können wir dann, von $|0\rangle$ ausgehend einen wegen (E3) endlichdimensionalen Hilbertraum aufbauen. Die physikalischen Zustände sollen aus diesem Hilbertraum sein. Ihre Zeitentwicklung wird mit einer Schrödingergleichung beschrieben, die Operatoren $\psi_i(\vec{n})$ und $\psi^+_i(\vec{n})$ sind zeitunabhängig. Die Zeit behandeln

1) F.Bopp: Z. Physik 200 S. 117, 133, 142 (1967). E.G. Weidemann und F.Bopp: Z. Physik 204 S. 311 im folgenden als I,II,III,IV zitiert.

wir im Gegensatz zum Ortsraum naiv, d.h. als kontinuierlich veränderlichen Parameter. Die Schrödingergleichung für die Zustände hat die Form:

$$i|\dot{\varphi}\rangle = \left(-\frac{i\sqrt{2}}{2\ell}\sum_{\vec{n}}\psi^{+}(\vec{n})\rho_1^{B}\sum_{i=1}^{3}\sigma_i^{B}\{\psi(\vec{n}+\vec{e}_i)-\psi(\vec{n}-\vec{e}_i)\}\right)|\varphi\rangle + H_W|\varphi\rangle \qquad \text{(E5)}$$

Für H_W wird die Vierfermionenapproximation verwendet. Im weiteren werden die folgenden beiden Möglichkeiten für H_W diskutiert:

$$H_W^{A} = W\cdot\sum_{\vec{n}}\{\psi^{+}(\vec{n})\vec{\sigma}^{B}\psi(\vec{n})\psi^{+}(\vec{n})\vec{\sigma}^{B}\psi(\vec{n}) - \psi^{+}(\vec{n})\rho_1^{B}\psi(\vec{n})\psi^{+}(\vec{n})\rho_1^{B}\psi(\vec{n})\}$$

$$H_W^{B} = W\cdot\sum_{\vec{n}}\{\psi^{+}(\vec{n})\vec{\sigma}^{B}\psi(\vec{n})\psi^{+}(\vec{n})\vec{\sigma}^{B}\psi(\vec{n}) - \psi^{+}(\vec{n})\vec{\rho}^{B}\psi(\vec{n})\psi^{+}(\vec{n})\vec{\rho}^{B}\psi(\vec{n})\} \qquad \text{(E6)}$$

Die Matrizen ρ_i^{B} und σ_i^{B} haben die Form:

$$\vec{\rho}^{B} = (\sigma_2\rho_1, \rho_2, \sigma_2\rho_3) \quad ; \quad \vec{\sigma}^{B} = (\rho_2\sigma_1, \sigma_2, \rho_2\sigma_3)\,;$$

$$\sigma_i = 1\times\sigma_i^{P} \quad ; \quad \rho_i = \sigma_i^{P}\times 1 \quad ; \quad \vec{\sigma}^{P} = \left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right) \qquad \text{(E7)}$$

Wir nennen die Darstellung, in der der Hamiltonoperator die Form (E5) und (E6) hat, B-Darstellung. Die zu dieser Darstellung gehörenden Größen werden wir im weiteren mit einem Index B versehen. An Stelle der B-Darstellung werden wir oft in der ρ_3 -Darstellung rechnen, die folgendermaßen definiert ist:

$$\psi_B(\vec{n}) = \frac{(1-i)}{2\cdot\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1&-i&i\\-1&1&-i&-i\\i&-i&1&1\\i&i&-1&1\end{pmatrix}\psi_{\rho_3}(\vec{n}) \qquad \text{(E8)}$$

Mit (E8) erhält der Bewegungsoperator (E5) die Matrizen $\rho_3\sigma_i$,der Operator H_W^{A} die Matrizen $\vec{\sigma}\times\vec{\sigma} - \rho_2\times\rho_3$, H_W^{B} erhält $\vec{\sigma}\times\vec{\sigma}$ $-\vec{\rho}\times\vec{\rho}$. Die ρ_2 -Darstellung ist für Zustände, in denen Neutrinos enthalten sind besonders übersichtlich. (Siehe Kapitel V, wo auch die Frage beantwortet wird, wann wir von einem Zustand sagen können, daß er

Neutrinos enthält.) Daneben werden wir auch Darstellungen verwenden, die wesentlich von der B-Darstellung verschieden sind, da die zu ihnen führenden Transformationen nicht mit der Teilchenzahl vertauschen, z.B. hat die D-Darstellung, die in Kapitel III eingeführt wird, diese Eigenschaft. Solche Transformationen machen im Gitterraum überhaupt keine Schwierigkeiten und sind für die Rechnung sehr vorteilhaft. Obwohl die Teilchenzahl der B-Darstellung keine invariante Bedeutung hat, werden wir uns hauptsächlich auf Zustände der B-Teilchenzahl $2Z^3$ konzentrieren, da diese die invariante Eigenschaft haben, daß zu ihnen die tiefsten Energien gehören und insbesondere der Grundzustand in ihnen enthalten ist. (Siehe III, IV) Wenn wir gemäß l.c.I eine Fourriertransformation der Felder mit

$$\psi(\vec{u}) = \frac{1}{\sqrt{Z^3}} \sum_{\vec{h}} e^{\frac{2\pi i}{Z} \vec{u}\cdot\vec{h}} \psi(\vec{h}) \quad ; \quad \psi^+(\vec{h}) = \frac{1}{\sqrt{Z^3}} \sum_{\vec{u}} e^{-\frac{2\pi i}{Z} \vec{h}\cdot\vec{u}} \cdot \psi^+(\vec{u}) \tag{E9}$$

ausführen, hat der Bewegungsoperator die Form:

$$H_{Bew} = \frac{\sqrt{Z}}{l} \cdot \sum_{\vec{h}} \psi^+(\vec{h}) \left(\sin \frac{2\pi}{Z} \cdot \vec{h}\right) \vec{\sigma}^B g_1^B \psi(\vec{h}) \tag{E10}$$

Den Vektor $\vec{K} = \frac{\sqrt{Z}}{l} \sin \frac{2\pi}{Z} \cdot \vec{h}$ identifizieren wir mit dem physikalischen Impuls (siehe l.c.I). Die in Wirklichkeit beobachteten Impulse sollen zu Werten von $\vec{h}$ gehören, die kleiner als oder proportional zu $\sqrt{Z}$ sind. $\vec{k}$ ist dann eine Erhaltungsgröße.[1]
Wir werden im Folgenden konsequente Gitterraumtheorie betreiben, d.h. wir werden auch Gitterraumeigenschaften, die nicht ins Kontinuum übertragen werden können, verwenden. So werden wir z.B. von typischen Gitterraumsymmetrien Gebrauch machen und mit ihrer Hilfe

1) i. a. ist $\vec{k}$ keine Erhaltungsgröße, sondern nur $\vec{h}$. So wird z.B. bei einem Zweiteilchenzustand $\vec{h} = \vec{h}_1 + \vec{h}_2$ erhalten, wegen der Sinusdispersionsbeziehung $\vec{k} = \vec{k}(\vec{h}_1) + \vec{K}(\vec{h}_2)$ nur dann, wenn man den Sinus durch das Argument ersetzen kann.

eine günstige Grundzustandsapproximation erhalten. Gruppentheoretische Untersuchungen werden überhaupt den wesentlichen Bestandteil dieser Arbeit darstellen, auf ihrer Grundlage werden die meisten der hier formulierten Ergebnisse abgeleitet werden.
Wir beginnen mit einer Untersuchung der von F.Bopp vorgeschlagenen Wechselwirkung H_W^B. Diese wird zu zwei wichtigen Ergebnissen führen. Erstens werden wir eine zur SU (2) isomorphe Symmetrie ruppe finden, zweitens wird es sich zeigen, daß bei dieser Wechselwirkung eine dem Hartree-Fock-Grundzustand von l.c.IV entsprechende Grundzustandsapproximation immer unter der minimalen Energie $-2WZ^3$ von H_W^B liegt. Die erwähnte SU (2) Gruppe läßt bei A-Wechselwirkung den Hamiltonoperator nicht invariant. Ihre Transformationen ändern also bei Anwendung auf einen Zustand im Allgemeinen die Energie. Die bei der Diskussion der B-Wechselwirkung gemachten Erfahrungen werden uns zu einer Transformation aus der SU (2) führen, die bei A-Wechselwirkung den H.F.Grundzustand, dessen Energie für große W gegen $-2WZ^3$ geht, auf einen Zustand transformiert, dessen Energie wie bei der B-Wechselwirkung unter der Grundzustandsenergie $-4WZ^3$ von H_W^A liegt. Wie bei der H.F. Lösung verhält sich die neue Grundzustandsapproximation für A-Wechselwirkung wie ein Diracsee für Fermionen mit Masse, in dem alle negativen Energien besetzt sind. Eine Abschätzung der Energie des absoluten Grundzustandes wird zeigen, daß wir mit dieser Grundzustandsapproximation jedenfalls für große W sehr nahe beim absoluten Grundzustand sind. Im Vergleich dazu werden wir noch Rechnungen ausführen, die von einem speziellen Grundzustand von H_W als Grundzustandsapproximation für H ausgehen. Es wird sich herausstellen, daß man damit in einem Gebiet der Physik ist, wo es keine Fermionen mit Masse gibt. Wir werden jedoch für diesen Teil der Physik exakte Eigenzustände, darunter solche, die freie Neutrinos enthalten, angeben können.

I. Der Wechselwirkungsoperator H_W^B

I.A. Das lokale Spektrum von H_W^B

Vorbemerkung: Alle Rechnungen in (L) werden in der β_3 -Darstellung ausgeführt, der Index β_3 an den Operatoren und Zuständen wird der Einfachkeit halber weggelassen.

Unter dem lokalen Spektrum von H_W^B wird das Spektrum eines Summanden $H_W^B(\vec{u}) = W\{(\psi^+(\vec{u})\vec{\sigma}\psi(\vec{u}))^2 - (\psi^+(\vec{u})\vec{\tau}\psi(\vec{u}))^2\}$ von $H_W^B = \sum_{\vec{n}} H_W^B(\vec{u})$ verstanden. Das Spektrum von $H_W^B(\vec{n})$ ist von $\vec{n}$ unabhängig. Es hat die folgende Gestalt:

Eigenwert	zugehörige Eigenzustände
$E = -8W$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}\psi^+(\vec{u})\beta_2\beta_i\sigma_2\psi^{\#}(\vec{u})\,|0\rangle$
$E = 0$	$\begin{cases} \|0\rangle \\ \|4\rangle = (\frac{1}{2\sqrt{2}}\psi^+(\vec{u})\beta_1\sigma_2\psi^{\#}(\vec{u}))^2\|0\rangle \\ \psi_i^+(\vec{u})\|0\rangle \\ \frac{1}{6}\epsilon_{iklm}\psi_k^+(\vec{u})\psi_l^+(\vec{u})\psi_m^+(\vec{u})\|0\rangle \end{cases}$ (I,1)
$E = 8W$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}\psi^+(\vec{u})\beta_2\sigma_2\sigma_i\psi^{\#}(\vec{u})\,|0\rangle$

Die Ursache für die hohe Symmetrie des Spektrums von $H_W^B(\vec{n})$ bilden die folgenden Symmetrieeigenschaften von $H_W^B(\vec{n})$:

1. Die Teilchen-Loch Symmetrie: Ihr entspricht die Substitution

$\psi(\vec{u}) = \beta_1\sigma_2\psi^{\#}_{T.L.}(\vec{u})$, die nicht nur H_W^B sondern auch $H_{Bew} + H_W^B$ invariant läßt.

2. Eine SU (2) x SU (2) Symmetriegruppe mit den Erzeugenden

$$R_i = \psi^+(\vec{n})\,\rho_i\,\psi(\vec{n}) \quad ; \quad S_i = \psi^+(\vec{n})\,\sigma_i\,\psi(\vec{n}) \tag{I,2}$$

Da in (I,2) keine Summe über $\vec{n}$ auszuführen ist, können wir an jedem Punkt $\vec{n}$ unabhängig transformieren, so daß $H_W^B = \sum_{\vec{n}} H_W^B(\vec{n})$ eine (SU (2) $\otimes$ SU (2) $\otimes \cdots \otimes$ (Z^3-mal) $\otimes \cdots \otimes$ (SU(2) $\otimes$ SU(2)) Symmetrie hat. H_{Bew} hat diese Symmetrie nicht. Die von R_i und S_i erzeugten Transformationen werden wir R- bzw. S-Transformationen nennen.

3. Eine diskrete Transformation, im weiteren S_w-Transformation genannt, die durch die Substitution

$$\psi(\vec{n}) = \frac{1}{2}\left(1 + \sum_i \rho_i \sigma_i\right)\psi'(\vec{n}) \tag{I,3}$$

dargestellt wird. Sie vertauscht in Bilinearformen die ρ und σ Matrizen gemäß:

$$\psi^+(\vec{n})\,\rho_i\,\psi(\vec{n}) \overset{S_W}{\longleftrightarrow} \psi^+(\vec{n})\,\sigma_i\,\psi(\vec{n}) \tag{I,4}$$

$H_W^B(\vec{n})$ geht bei dieser Transformation in $-H_W^B(\vec{n})$ über. H_{Bew} bleibt dabei aber weder invariant, noch zeigt er ein ähnlich einfaches Transformationsverhalten wie $H_W^B(\vec{n})$. (Alle hier aufgeführten Transformationen sind natürlich unitär.)

Wir reduzieren nun die lokalen Zustände nach irredziblen Darstellungen der SU (2) $\otimes$ SU (2) Gruppe aus. Dabei werden die Darstellungen so gewählt, daß S_3 und R_3 diagonal sind. Die maximalen Eigenwerte von S_3 und R_3 sollen S und R sein. Dann können wir die irreduziblen Darstellungen der SU (2) $\otimes$ SU (2) durch das Wertepaar (S,R) kennzeichnen. Wegen der Invarianz von $H_W^B(\vec{n})$ gegenüber dieser Gruppe und unter Berücksichtigung der Teilchen-Lochsymmetrie von $H_W^B(\vec{n})$ ergibt sich folgendes Spektrum von $H_W^B(\vec{n})$:

Eigenwert	Zustände	Darstellungssymbol (S,R)
E1	$\{ \|10\rangle$	(0,0)
	$\|14\rangle$	(0,0)

Der Zustand $|14\rangle$ ist folgendermaßen definiert: $|14\rangle = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \psi^+(\vec{u}) \beta_4 \sigma_2 \psi^*(\vec{u})\right)^2 |10\rangle$

Eigenwert	Zustände	Darstellungssymbol (S,R)
E2	$\{ \psi^+_i(\vec{u})\|10\rangle$	(1/2,1/2)
	$\frac{1}{6} \epsilon_{iklm} \psi^+_k(\vec{u}) \psi^+_l(\vec{u}) \psi^+_m(\vec{u}) \|10\rangle$	(1/2,1/2)
E3	$\frac{1}{2\sqrt{2}} \psi^+(\vec{u}) \beta_2 \beta_i \sigma_2 \psi^*(\vec{u}) \|10\rangle$	(0,1)
E4	$\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}} \psi^+(\vec{u}) \sigma_2 \tau_i \beta_2 \psi^*(\vec{u}) \|10\rangle$	(1,0)

(I,5)

Die S_W-Transformation führt $H_W^B(\vec{n})$ in $-H_W^B(\vec{n})$ über und wirkt zugleich auf die obigen Multipletts wie folgt:

$$|10\rangle \longleftrightarrow |10\rangle \quad ; \quad |14\rangle \longleftrightarrow |14\rangle \quad ; \quad (0,1) \longleftrightarrow (1,0)$$

$$\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)_1 \longleftrightarrow \left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)_1 \quad ; \quad \left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)_3 \longleftrightarrow \left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)_3 \qquad \text{(I,6)}$$

Die Symbole $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)_1$ und $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)_3$ sollen die $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ Multipletts der Einteilchen bzw. Dreiteilchenzustände bezeichnen. Aus (I,6) folgt, da die Multipletts in bezug auf die SU (2) x SU (2) irreduzibel sind, daß

$$E1 = E2 = 0; \qquad \text{und} \qquad E3 = -E4 \qquad \text{(I,7)}$$

ist. Man hat damit die Gestalt des Spektrums von $H_W^B(\vec{n})$ aus den

Symmetrien von $H_W^B(\vec{n})$ abgeleitet. Man kann die hier benutzten Transformationen so abändern, daß sie auf H_W^B noch genauso wirken, jedoch auch $H_{Bew} = -\frac{i\sqrt{2}}{2\iota}\sum_{\vec{n}} \psi^+(\vec{n})\beta_3 \sum_{i=1}^{3}\sigma_i\{\psi(\vec{n}+\vec{e}_i) - \psi(\vec{n}-\vec{e}_i)\}$ möglichst einfach transformieren. Für die S-Transformationen ist das Vorgehen klar, man nimmt dafür die räumlichen Drehungen, die H_{Bew} invariant lassen. Da man nun nicht mehr an jedem Punkt unabhängig transformieren kann, bleibt von den Z^3 Gruppen der S-Transformationen, die man für die Z^3 Punkte $\vec{n}$ hatte, nur noch eine SU (2) übrig. Für die Modifikation der R-Transformationen unterscheiden wir die beiden Möglichkeiten, daß Z geradzahlig oder ungeradzahlig ist.

a) Sei Z geradzahlig. Dann führen wir statt der R-Transformationen Transformationen mit den folgenden infinitesimalen Erzeugenden ein:

$$\bar{R}_1 = \sum_{\vec{n}} e^{i\pi\vec{n}\vec{\alpha}}\psi^+(\vec{n})\beta_1\psi(\vec{n}) \quad ; \quad \bar{R}_2 = \sum_{\vec{n}} e^{i\pi\vec{\alpha}\vec{n}}\psi^+(\vec{n})\beta_2\psi(\vec{n})$$

$$\bar{R}_3 = \sum_{\vec{n}} \psi^+(\vec{n})\beta_3\psi(\vec{n}) \quad ; \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \tag{I,8}$$

Die $\bar{R}_i$ vertauschen ebenfalls mit H_W^B, aber sie vertauschen auch mit H_{Bew}. Untereinander vertauschen sie wie die infinitesimalen Operatoren einer SU (2). Wegen der Verkopplung der Punkte des Ortsraumes durch den Bewegungsoperator bleibt von den ursprünglichen Z^3 unverkoppelten SU (2) Gruppen der R_i nur noch die eine SU (2) der $\bar{R}_i$ übrig, was sich in der Summenbildung ausdrückt. Eine der S_W- Transformation entsprechende Transformation sieht folgendermaßen aus:

$$\psi(\vec{n}) = \tfrac{1}{2}\left(1 + e^{i\pi\vec{\gamma}\vec{n}}\beta_1\sigma_1 - e^{i\pi\vec{\beta}\vec{n}}\beta_2\sigma_2 - e^{i\pi(\vec{\beta}+\vec{\gamma})\vec{n}}\beta_3\sigma_3\right)\psi'(\vec{n})$$

$$\vec{\gamma}^T = (1,0,0) \quad ; \quad \vec{\beta}^T = (0,1,0) \tag{I,9}$$

Sie wird im weiteren $\bar{S}_W$-Transformation genannt. Die $\bar{S}_W$-Transformation hat die Eigenschaft, daß sie H_W^B in $-H_W^B$ überführt und dabei H_{Bew} invariant läßt. Man kann sie auch so deuten, daß ihre Anwendung die Kopplungskonstante W in -W überführt. Führt man anschließend an

die S_W-Transformation eine der Transformationen

$$\psi(\vec{u}) = \beta_i \psi'(\vec{u}) \; ; \; i = 1,2 \quad \text{oder} \quad \psi(\vec{u}) = \beta_\kappa \psi'(-\vec{u}) \; ; \; \kappa = 0,3 \qquad (I,10)$$

aus, dann geht dabei $H_{Bew} + H_W^B$ in $-H_{Bew} - H_W^B$ über. Das Spektrum des gesamten Hamiltonoperators ist also symmetrisch zum Nullpunkt. Gehen wir zum reziproken Gitter über, so haben die $\bar{R}_i$ die Form:

$$\bar{R}_3 = \sum_{\vec{h}} \psi^+(\vec{h}) \beta_3 \psi(\vec{h}) \; ; \quad \bar{R}_1 = \sum_{\vec{h}} \psi^+(\vec{h} + \vec{v}_i) \beta_1 \psi(\vec{h}) \; ;$$
$$\bar{R}_2 = \sum_{\vec{h}} \psi^+(\vec{h} + \vec{v}_i) \beta_2 \psi(\vec{h}) \; ; \qquad (I,11)$$

Dabei ist v_i^T einer der acht Vektoren, die man aus $(\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{2})$ durch alle möglichen Vorzeichenwahlen erhält. Es kommt noch die Nebenbedingung dazu, daß $\vec{h} + \vec{v}_i$ aus dem reziproken Gitter ist, für dessen Vektoren $\vec{h}'$ gelten soll: $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq h_i' \leq \frac{\pi}{2}$. Dadurch ist $\vec{v}_i$ für jedes vorgegebene $\vec{h}$ eindeutig bestimmt. Der $\bar{S}_W$-Transformation entspricht in der Impulsdarstellung die Transformation:

$$\psi(\vec{u}) = \frac{1}{2}\left(\psi'(\vec{h}) + \beta_1\sigma_1 \psi(\vec{h} + \vec{W}_i) - \beta_2\sigma_2 \psi'(\vec{h} + \vec{z}_\kappa) - \right.$$
$$\left. - \beta_3\sigma_3 \psi'(\vec{h} + \vec{W}_i + \vec{z}_\kappa)\right) \qquad (I,12)$$

Dabei ist

$$\vec{W}_i \in \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \vec{z}_\kappa \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad (I,13)$$

mit der gleichen Nebenbedingung wie oben. In der Impulsdarstellung sieht man anschaulich den Grund für die Existenz der Symmetrietransformationen $\bar{R}$ und $\bar{S}_W$. Er liegt darin, daß $\vec{k}(\vec{h} + \vec{v}_i) = -\vec{k}(\vec{h})$ ist und damit gilt:

$$\psi^+(\vec{h} + \vec{v}_i) \beta_3 \vec{\sigma} \vec{k}(\vec{h} + \vec{v}_i) \psi(\vec{h} + v_i) = -\psi^+(\vec{h} + \vec{v}_i) \beta_3 \vec{\sigma} \vec{k}(\vec{h}) \psi(\vec{h} + \vec{v}_i) \qquad (I,14)$$

Die Bedeutung der Geradzahligkeit von Z soll an einer der infinitesimalen Transformationen $\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$ gezeigt werden. Die Faktoren $e^{i\pi \vec{\alpha}\vec{u}}$ $e^{i\pi \vec{\alpha}\vec{u}}$ können nur die Werte +1 und -1 annehmen und zwar ist bei geradem Wert der Summe $\vec{u}_x+\vec{u}_y+\vec{u}_z$ gleich +1 und bei ungeradem Wert gleich -1. Die Werte +1 und -1 sind auf das Gitter verteilt wie die Na und Cl Ionen im NaCl Kristallgitter. Ein Kochsalzgitter können wir aber in unseren Gitterraum wegen der periodischen Randbedingungen nur einbetten, wenn Z gerade ist, wie man an dem folgenden eindimensionalen Beispiel sofort sieht.

Bei der $\overline{S}_W$-Transformation sind die Verhältnisse prinzipiell die gleichen

b) Sei Z ungerade. Die Operatoren $\overline{R}_i$ und die $\overline{S}_W$-Transformation vertauschen nun nicht mehr mit dem ganzen Bewegungsoperator. Sie vertauschen zwar noch mit allen Summanden $-\frac{i\sqrt{\frac{3}{2}}}{2L}\psi^+(\vec{n})\,\sigma_3\,\sigma_i\{\psi(\vec{n}+\vec{e}_i)-\psi(\vec{n}-\vec{e}_i)\}$ von H_{Bew}, bei denen $\vec{n}$ innerer Punkt des Gitters ist, jedoch nicht mehr mit den Summanden, bei denen $\vec{n}$ äußerer Punkt des Gitters ist. Wenn bei ungeradem Z das Gitter durch die Menge $\{\vec{n};\ n_i$ ganzzahlig und $-\frac{z}{2}+\frac{1}{2} \le n_i \le \frac{z}{2}-\frac{1}{2}\}$ dargestellt wird, nennen wir "äußere" Punkte des Gitters alle Punkte $\vec{n}$, bei denen wenigstens eine Komponente gleich $\frac{z}{2}-\frac{1}{2}$ oder $-\frac{z}{2}+\frac{1}{2}$ ist. Entsprechend sind "innere" Punkte solche, bei denen keine Komponente gleich $\frac{z}{2}-\frac{1}{2}$ oder $-\frac{z}{2}+\frac{1}{2}$ ist. Die symmetrieverletzenden Anteile von H_{Bew} sind demnach proportional zur Oberfläche des Gitters, umfassen also größenordnungsmäßig Z^2 Terme, während der symmetrieerhaltende Teil von H_{Bew} proportional zum Volumen ist, also größenordnungsmäßig Z^3 Terme enthält. Der symmetriebrechende Anteil von H_{Bew} ist damit proportional zu $\frac{1}{Z}H_{Bew}$. Das hat zur Folge, daß die Verletzung der $\overline{R}_i$ und $\overline{S}_W$ Symmetrie bei ungeradem Z für alle in dieser Arbeit ausgeführten Rechnungen im Limes $Z\to\infty$ vernachlässigbar wird, was an den entsprechenden Stellen auch gezeigt werden wird. Die Zustände,

die wir konstruieren werden, sind alle von der Art, daß sie für gerades oder ungerades Z nicht wesentlich verschieden sind, während Zustände, bei denen die Brechung der $\overline{R}_i$ und $\overline{S}_i$ Symmetrie relevant ist, diese Eigenschaft nicht haben.

Die Impulsdarstellungen der $\overline{R}_i$ und $\overline{S}_N$ sehen nun etwas anders aus als bei geradem Z, was sich schon daraus ergibt, daß die $\vec{v}_i$ halbzahlige Komponenten haben, also keine Gittervektoren sind. Man erhält für die $\overline{R}_i$:

$$\overline{R}_3 = \sum_{\vec{k}} \varphi^+(\vec{k}) \beta_3 \varphi(\vec{k}) \quad ; \quad \overline{R}_1 = \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} a(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)\, \varphi^+(\vec{k}_1) \beta_1 \varphi(\vec{k}_2) \; ;$$

$$\overline{R}_2 = \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} a(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)\, \varphi^+(\vec{k}_1) \beta_2 \varphi(\vec{k}_2)$$

dabei ist $a(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) = \frac{1}{Z^3} \sum_{\vec{n}} e^{\frac{2\pi i}{Z}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2 + \frac{Z}{2}\vec{\alpha})\cdot\vec{n}}$ (I,15)

Die Funktion $a(\vec{h}_1 - \vec{h}_2)$ sorgt dafür, daß zu $\overline{R}_{1,2}$ nur diejenigen Summanden wesentlich beitragen, bei denen $\vec{h}_2$ in einer kleinen Umgebung von $\vec{h}_1 + \vec{v}_i$ liegt. Für große Z ist

$$a(\vec{h}_1 - \vec{h}_2) = \frac{8}{\pi^3 \cdot h_x \cdot h_y \cdot h_z} \qquad (I,16)$$

h_x, h_y, h_z sind die Komponenten eines Vektors $\vec{h}$, der folgendermaßen definiert ist: $\vec{h}_1 - \vec{h}_2 = \vec{v}_i + \frac{\vec{h}}{2}$. $\vec{h}$ hat lauter ungerade Komponenten, die durch -Z und +Z begrenzt werden. Bei physikalischen Abständen der Differenz $\vec{h}_1 - \vec{h}_2$ von $\vec{v}_i$, also h_x, h_y, h_z prop. $\sqrt{Z}$ ist $a(\vec{h}_1 - \vec{h}_2)$ bereits um einen Faktor $\frac{1}{\sqrt{Z^3}}$ kleiner als in unmittelbarer Nähe von $\vec{v}_i$ (endliche h_x, h_y, h_z).

Die $\overline{R}$-Transformationen und die $\overline{S}_N$-Transformation sind echte Gitterraumtransformationen, die nicht direkt auf das Kontinuum übertragen werden können, allein schon deshalb, weil man im Kontinuum keine Funktion zur Verfügung hat, die der Gitterraumfunktion $e^{i\pi\vec{n}\vec{\alpha}}$ entspricht. Eine weitere Voraussetzung für die Existenz der $\overline{R}$ und $\overline{S}_N$ Symmetrie ist die Sinusdisperionsrelation $\vec{K}(\vec{h}) = \frac{\sqrt{2}}{c} \sin\frac{\pi}{2}\vec{h}$ für den Impuls. Damit gilt $\vec{K}(\vec{h} + \vec{v}_i) = -\vec{K}(\vec{h})$ und es besteht eine Entartung der Eigenwerte von H_{Bew} bei $\vec{h}$ und $\vec{h} + \vec{v}_i$. Bei linearer Dispersion $\vec{k} = c\vec{h}$ kann man ebenfalls $\overline{R}$-Transformationen definieren, die mit H_{Bew} vertauschen und zwar durch die folgenden Erzeu-

genden:

$$R_3 = \sum_{\vec{h}} \psi^+(\vec{h}) \beta_3 \psi(\vec{h}) \; ;$$

$$R_1 = \sum_{\vec{h}} \psi^+(-\vec{h}) \beta_1 \psi(\vec{h}) \quad ; \quad R_2 = \sum_{\vec{h}} \psi^+(-\vec{h}) \beta_2 \psi(\vec{h}) \; ; \qquad \text{(I,17)}$$

Wir haben dabei die Entartung bei $\vec{k}(\vec{h})$ und $\vec{k}\,(-\vec{h})$ ausgenützt.[1] Diese lassen sich auch auf das Kontinuum übertragen, sie sind jedoch im Ortsraum nicht lokal und vertauschen deswegen auch nicht mit H_W^B. Eine Übertragung der $\overline{R}$ und $\overline{S}$ Transformationen auf das Kontinuum ist aber dann möglich, wenn wir das reziproke Gitter auf ein Gitter mit der halben Kantenlänge abbilden. Das geschieht mit den folgenden Substitutionen:

$$\psi_i\left(\vec{h}' + \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \beta_1 \sigma_1 \psi_{i1}(\vec{h}') \quad ; \quad \psi_i\left(\vec{h}' + \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix}\right) = \sigma_2 \psi_{i5}(\vec{h}') \; ;$$

$$\psi_i\left(\vec{h}' + \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \beta_1 \sigma_2 \psi_{i2}(\vec{h}') \quad ; \quad \psi_i\left(\vec{h}' + \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}\right) = \sigma_1 \psi_{i6}(\vec{h}') \; ;$$

$$\psi_i\left(\vec{h}' + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}\right) = \beta_1 \sigma_3 \psi_{i3}(\vec{h}') \quad ; \quad \psi_i\left(\vec{h}' + \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}\right) = \beta_1 \psi_{i7}(\vec{h}') \; ;$$

$$\psi_i\left(\vec{h}' + \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \sigma_3 \psi_{i4}(\vec{h}') \quad ; \quad \psi_i(\vec{h}') = \psi_{i0}(\vec{h}') \; ; \qquad \text{(I,18)}$$

Dabei ist $\vec{h}'$ ein Vektor aus dem reziproken Gitter, für den gilt:
$-\frac{Z}{4} + 1 \leq \vec{h}'_{x,y,z} \leq \frac{Z}{4}$ ($\frac{Z}{2}$ gerade) oder $-\frac{Z}{4} + \frac{1}{2} \leq h'_{x,y,z} \leq \frac{Z}{4} - \frac{1}{2}$ ($\frac{Z}{2}$ ungerade)
a ist entweder $+\frac{Z}{2}$, oder $-\frac{Z}{2}$, mit der üblichen Nebenbedingung, daß man in der ersten Periode des reziproken Gitters bleib t. Der Bewegungsoperator hat in der Darstellung (I,18) die Gestalt:

$$H_{Bew} = \sum_{\vec{h}',i,\kappa,\mu} \psi^+_{i\mu}(\vec{h}')\, \vec{k}(\vec{h}') \cdot (\beta_3 \vec{\sigma})_{i\kappa}\, \psi_{\kappa\mu}(\vec{h}') \qquad \text{(I,19)}$$

1) gemeint ist die Entartung der Eigenwerte von H_{Bew} an den beiden Stellen.

Die Entartung an den Punkten $\vec{h}'$ und $\vec{h}' + \begin{pmatrix} 0,a \\ 0,a \\ 0,a \end{pmatrix}$ hat man damit auf den Raum der Indizes μ abgewälzt.[1] Die $\bar{R}$ und $\bar{S}_W$ Transformationen wirken jetzt im Raum der μ Indizes. Die Dispersionskurve $\vec{K}(\vec{h}')$ in (I,19) biegt nicht mehr nach Erreichen eines Maximums zu kleineren Impulsen um. Eine Übertragung des Gitterraumes ins Kontinuum sollte von (I,19) ausgehen, da wir dann die für den Gitterraum wesentlichen Entartungseffekte mitnehmen. Der Wechselwirkungsoperator wird in der Darstellung (I,18) sehr unübersichtlich, da er alle Matrizen im μ Raum enthält, die mit der ursprünglichen Impulserhaltung im Wechselwirkungsoperator gemäß:

$$\vec{h}_1 - \vec{h}_2 + \vec{h}_3 - \vec{h}_4 = \begin{pmatrix} 0,z \\ 0,z \\ 0,z \end{pmatrix} \qquad \text{(I,20)}$$

verträglich sind. Er bricht deswegen auch die SU (8) Symmetrie des Bewegungsoperators (I,19) bis auf die $\bar{R}$-Transformationen. Die SU(8) Transformationen des μ Raumes sind wegen der Nichtlokalität der Substitutionen (I,18) in der ursprünglichen Darstellung im allgemeinen nicht lokal ("lokal" bezieht sich hier auf dem Ortsraum).[2] Es gibt jedoch eine SU(4) Untergruppe von lokalen Transformationen.[2] Sie hat die folgenden infinitesimalen Erzeugenden:

$$\bar{R}_3 = \sum_{\vec{h}} \psi^+(\vec{h})\, \beta_3\, \psi(\vec{h}) \quad ; \quad \bar{R}_1 = \sum_{\vec{h}} \psi^+\left(\vec{h} + \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}\right) \beta_1\, \psi(\vec{h}) \quad ;$$

$$\bar{R}_2 = \sum_{\vec{h}} \psi^+\left(\vec{h} + \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}\right) \beta_2\, \psi(\vec{h}) \quad ; \quad \bar{R}_4 = \sum_{\vec{h}} \psi^+\left(\vec{h} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \beta_1 \sigma_1\, \psi(\vec{h}) \quad ;$$

$$\bar{R}_5 = \sum_{\vec{h}} \psi^+\left(\vec{h} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \beta_2 \sigma_1\, \psi(\vec{h}) \quad ; \quad \bar{R}_6 = \sum_{\vec{h}} \psi^+\left(\vec{h} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}\right) \beta_1 \sigma_2\, \psi(\vec{h}) \quad ;$$

1) $\begin{pmatrix} 0,a \\ 0,a \\ 0,a \end{pmatrix}$ ist so gemeint, daß man für jede Komponente beliebig Null oder a wählen kann.

2) siehe Anhang B1

$$\bar{R}_7 = \sum_{\vec{h}} \psi^+(\vec{h} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}) \rho_2 \sigma_2 \psi(\vec{h}) \quad ; \quad \bar{R}_8 = \sum_{\vec{h}} \psi^+(\vec{h} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}) \rho_1 \sigma_3 \psi(\vec{h}) \quad ;$$

$$\bar{R}_9 = \sum_{\vec{h}} \psi^+(\vec{h} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}) \rho_2 \sigma_3 \psi(\vec{h}) \quad ; \quad \bar{R}_{10} = \sum_{\vec{h}} \psi^+(\vec{h} + \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}) \sigma_1 \psi(\vec{h}) \quad ;$$

$$\bar{R}_{11} = \sum_{\vec{h}} \psi^+(\vec{h} + \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}) \rho_3 \sigma_1 \psi(\vec{h}) \quad ; \quad \bar{R}_{12} = \sum_{\vec{h}} \psi^+(\vec{h} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix}) \sigma_2 \psi(\vec{h}) \quad ;$$

$$\bar{R}_{13} = \sum_{\vec{h}} \psi^+(\vec{h} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix}) \rho_3 \sigma_2 \psi(\vec{h}) \quad ; \quad \bar{R}_{14} = \sum_{\vec{h}} \psi^+(\vec{h} + \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}) \sigma_3 \psi(\vec{h}) \quad ;$$

$$\bar{R}_{15} = \sum_{\vec{h}} \psi^+(\vec{h} + \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}) \rho_3 \sigma_3 \psi(\vec{h}) \quad ; \qquad (I,21)^1$$

I.B. Grundzustandsapproximationen durch Produktansätze

Wegen der Erhaltung der Teilchenzahl zerfällt das System der Lösungen der Eigenwertgleichung $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ vollständig nach der Teilchenzahl. Unter den möglichen Teilchenzahlen ist der Raum der Zustände mit $2Z^3$ Teilchen mehrfach ausgezeichnet. Einmal enthält er, wie wir später noch zeigen werden, die tiefsten Energien und den Grundzustand; zum andern ist die Teilchen-Loch Symmetrie hier eine innerweltliche Symmetrie, so daß man Teilchen und Antiteilchen definieren kann. Es ist deshalb sinnvoll, die Grundzustandsapproximation im Raum der Zustände mit $2Z^3$ Teilchen vorzunehmen. Die Approximation wird im Folgenden darin bestehen, daß wir nur solche Zustände untersuchen werden, die an jedem Punkt im $\vec{h}$-Raum zweifach besetzt sind, wobei wir hoffen, unter ihnen brauchbare Näherungen für den Grundzustand zu finden. Solche Zustände wurden von F.Wahl[2] und D.Stocker[2] für die A-Wechselwirkung bereits diskutiert und dabei gezeigt, daß die erhaltenen Lösungen äquivalent zu den Hartree-Fock Lösungen sind. Wir werden im Folgenden mit dieser Methode die

1) Die $\bar{S}_W$-Transformation ist eine spezielle Transformation aus der von den $\bar{R}$ erzeugten SU (4).

2) siehe l.c. V.

B-Wechselwirkung untersuchen. Entsprechend dem obigen gehen wir also von folgendem Testzustand aus:

$$|\varphi\rangle = \overline{\prod_{\vec{k}}} \varphi^{+}(\vec{k})\ \chi(\vec{k})\ \varphi^{\#}(\vec{k})\ \cdot|0\rangle \tag{I,22}$$

Wegen der Normbedingung gilt:

$$\langle\varphi|\varphi\rangle = \overline{\prod_{\vec{k}}} \left(2\cdot S_p\left(\chi^{+}(\vec{k})\cdot\chi(\vec{k})\right)\right) \quad = 1 \tag{I,23}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir fordern:

$$2\cdot S_p\left(\chi^{+}(\vec{k})\,\chi(\vec{k})\right) = 1 \qquad \text{für alle } \vec{h} \tag{I,24}$$

Wir berechnen nun den Erwartungswert $\langle\varphi|H|\varphi\rangle =$

$$= \langle\varphi|H_{Bew}|\varphi\rangle \;+\; \frac{W}{2^3} \sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3,\vec{k}_4} \delta(\vec{k}_1-\vec{k}_2+\vec{k}_3-\vec{k}_4)\cdot$$

$$\cdot\langle\varphi|\left(\varphi^{+}(\vec{k}_1)\vec{\sigma}\varphi(\vec{k}_2)\,\varphi^{+}(\vec{k}_3)\vec{\sigma}\varphi(\vec{k}_4) - \varphi^{+}(\vec{k}_1)\vec{\rho}\varphi(\vec{k}_2)\,\varphi^{+}(\vec{k}_3)\vec{\rho}\varphi(\vec{k}_4)\right)|\varphi\rangle \tag{I,25}$$

Der Erwartungswert des Bewegungsoperators ist

$$\langle\varphi|H_{Bew}|\varphi\rangle = \sum_{\vec{k}} 4\cdot S_p\left(\chi^{+}(\vec{k})\,\rho_2\,\vec{k}(\vec{k})\vec{\sigma}\,\chi(\vec{k})\right) \tag{I,26}$$

Da $\varphi^{+}(\vec{k})\varphi(\vec{k})|\varphi\rangle = 2\cdot|\varphi\rangle$ ist für jedes $\vec{h}$, folgt, daß in dem Ausdruck $\langle\varphi|\,H_W^{B}\,|\varphi\rangle$ nur die Summanden ungleich Null sind, für die entweder $\vec{h}_1 = \vec{h}_2$ und $\vec{h}_3 = \vec{h}_4$ ist oder $\vec{h}_1 = \vec{h}_4$ und $\vec{h}_2 = \vec{h}_3$ ist. Wegen der Vierzinvarianz von H_W^{B} ergeben die beiden Möglichkeiten den gleichen Beitrag, so daß wir schreiben können:

$$\langle \varphi | H_W^B | \varphi \rangle = \frac{2iW}{Z^3} \sum_{\vec{k},\vec{k}'} \Big\{ \langle \varphi | \big(\chi^+(\vec{k}) \vec{\sigma} \chi(\vec{k}) \chi^+(\vec{k}') \vec{\sigma} \chi(\vec{k}') - \chi^+(\vec{k}) \vec{\beta} \chi(\vec{k}) \chi^+(\vec{k}') \vec{\beta} \chi(\vec{k}') \big) | \varphi \rangle \Big\} \qquad (I, 27)$$

Wir führen die folgende Bezeichnung ein:

$$O_1 = \sigma_1 \; ; \; O_2 = \sigma_2 \; ; \; O_3 = \sigma_3 \; ; \; O_4 = \beta_1 \; ; \; O_5 = \beta_2 \; ; \; O_6 = \beta_3$$

$$R_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & -1 & & \\ 0 & & & & -1 & \end{pmatrix} \qquad O^i = \sum_k R_{ik} O_k \qquad (I,28)$$

Damit ist $\langle \varphi | H_W^B | \varphi \rangle =$

$$= \frac{2W}{Z^3} \sum_{\vec{k},\vec{k}',i} \langle 0 | \chi^T(\vec{k}) \chi^+(\vec{k}) \chi(\vec{k}) \cdot \chi^T(\vec{k}') \chi^+(\vec{k}') \chi(\vec{k}') \cdot$$

$$\cdot \chi^+(\vec{k}) O_i \chi(\vec{k}) \cdot \chi^+(\vec{k}') O^i \chi(\vec{k}') \; \chi^+(\vec{k}) \chi(\vec{k}) \chi^+(\vec{k}) \chi^+(\vec{k}') \chi(\vec{k}') \chi^+(\vec{k}') | 0 \rangle \qquad (I,28)$$

Die Rechnung ergibt für $E = \langle \varphi | H_{Bew} + H_W^B | \varphi \rangle$

$$E = \sum_{\vec{k}} 4 \cdot Sp \left(\chi^+(\vec{k}) \beta_3 \vec{\sigma} \vec{K}(\vec{k}) \chi(\vec{k}) \right) +$$

$$+ \sum_{\vec{k} \neq \vec{k}',i} \frac{32W}{Z^3} Sp \left(\chi^+(\vec{k}) O_i \chi(\vec{k}) \right) Sp \left(\chi^+(\vec{k}') O^i \chi(\vec{k}') \right)$$

$$+ \sum_{\vec{k},i} \frac{4W}{Z^3} Sp \left(\chi^+(\vec{k}) O_i \chi(\vec{k}) O^{iT} \right) \qquad (I,29)$$

Der Ausdruck für E ist auffallend einf..ch, es kommt z.B. unter der Doppelsumme keine lange Spur vor. Der Grund dafür ist die Fierzinvarianz von H_W^B. Bevor wir E nach den Matrizen $\chi(\vec{k})$ variieren, führen wir noch einige Bezeichnungen ein. Sei B eine Matrix mit

$B_{ik} = b_{ik} + i\beta_{ik}$

Wir definieren:

$$\left(\frac{\partial}{\partial B^+} \right)_{ir} := \frac{\partial}{\partial b_{ri}} - \frac{\partial}{\partial i \cdot \beta_{ri}} \; ; \; \left(\frac{\partial}{\partial B} \right)_{ri} = \frac{\partial}{\partial b_{ri}} + \frac{\partial}{\partial i \cdot \beta_{ri}} \qquad (I,30)$$

Die folgenden Rechenregeln sind leicht zu verifizieren:

$$\frac{\partial}{\partial B^+}\,(Sp\,B^+AB) = 2\cdot(A\cdot B)^T \;;\; \frac{\partial}{\partial B}\,(Sp\,B^+AB) = 2\cdot(B^+A)^T \;;$$

$$\frac{\partial}{\partial B^+}\,(Sp\,B^+ABC) = 2\cdot(AB\cdot C)^T \;;\; \frac{\partial}{\partial B}\,(Sp\,B^+ABC) = 2\cdot(C\cdot B^+A)^T \;; \qquad (I,31)$$

Die Variation von E nach $\chi(\vec{h})$ unter den Nebenbedingungen $2\cdot Sp(\chi^+(\vec{h})\,\chi(\vec{h})) = 1$ (für jedes $\vec{h}$) führen wir nach der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren durch. Dazu bilden wir den Ausdruck:

$$E' = E - \sum_{\vec{h}} \lambda(\vec{h})\,(2\cdot Sp\,\chi^+(\vec{h})\,\chi(\vec{h}) - 1) \qquad (I,32)$$

Wir können nun E' frei nach $\chi(\vec{h})$ und $\chi^+(\vec{h})$ variieren. Wegen der Hermitezität der Matrizen $\rho_3\vec{h}\vec{\sigma}$ und O_i führen die Variationen nach $\chi(\vec{h})$ und $\chi^+(\vec{h})$ zu dem selben Ergebnis. Wir erhalten aus $\frac{\partial E'}{\partial \chi^+(\vec{h})} = 0$ (für jedes $\vec{h}$) ein System von Z^3 Wellengleichungen:

$$2\cdot\rho_3\vec{h}\vec{\sigma}\cdot\chi(\vec{h}) + \frac{32W}{Z^3}\Big\{\sum_{\vec{h}'(\vec{h}'\neq\vec{h})} Sp\,(\chi^+(\vec{h}')\,O_i\,\chi(\vec{h}'))\Big\}\cdot O^i\cdot\chi(\vec{h})$$

$$+\frac{2W}{Z^3}\,O_i\,\chi(\vec{h})\cdot(O^i)^T = \lambda(\vec{h})\,\chi(\vec{h}) \qquad \text{(Für jedes } \vec{h}) \qquad (I,33)$$

Multiplikation mit $\chi^+(\vec{h})$ und Summation ergibt den Zusammenhang zwischen E und $\lambda(\vec{h})$:

$$E = \sum_{\vec{h}}\lambda(\vec{h}) -$$

$$-\frac{32W}{Z^3}\sum_{\vec{h},\vec{h}'(\vec{h}\neq\vec{h}')}\Big\{Sp\,(\chi^+(\vec{h})\,O_i\,\chi(\vec{h}))\Big\}\Big\{Sp\,(\chi^+(\vec{h}')\,O^i\,\chi(\vec{h}'))\Big\} \qquad (I,34)$$

Für die Matrizen $\chi(\vec{h})$ machen wir den folgenden Ansatz:

$$\chi(\vec{h}) = \vec{f}(\vec{h})\,\vec{\sigma}\sigma_2\,\rho_2 + \vec{g}(\vec{h})\,\vec{\rho}\,\rho_2\sigma_2 \;; \qquad (I,35)$$

Setzen wir (I,35) in die Wellengleichungen (I,33) ein, dann erhalten wir unter Verwendung der Rechenregeln

$$Sp\left(\chi^{+}(\vec{k})\,\vec{\sigma}\,\chi(\vec{k})\right) = 4i\left(\vec{f}(\vec{k}) \times \vec{f}^{*}(\vec{k})\right);$$

$$Sp\left(\chi^{+}(\vec{k})\,\beta\,\chi(\vec{k})\right) = 4i\left(\vec{g}(\vec{k}) \times \vec{g}^{*}(\vec{k})\right);$$

$$Sp\left(\chi^{+}(\vec{k})\,\beta_3\,\vec{\sigma}\,\vec{\kappa}\,\chi(\vec{k})\right) = 4\cdot\left(g_3^{*}(\vec{k})\,\vec{\kappa}\,\vec{f}(\vec{k}) + g_3(\vec{k})\,\vec{\kappa}\,\vec{f}^{*}(\vec{k})\right); \qquad \text{(I,36)}$$

das Gleichungssystem

$$2\cdot g_3(\vec{k}) - \frac{32W}{Z^3}\cdot 4\cdot\left(\sum_{\vec{k}'(\vec{k}'\neq\vec{k})} \vec{f}(\vec{k}')\times\vec{f}^{*}(\vec{k}')\right)\times\vec{f}(\vec{k}) = \left(\lambda(\vec{k}) - \frac{\rho W}{Z^3}\right)\vec{f}(\vec{k});$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\2\vec{\kappa}\vec{f}(\vec{k})\end{pmatrix} + \frac{32W}{Z^3}\cdot 4\left(\sum_{\vec{k}'(\vec{k}'\neq\vec{k})} \vec{g}(\vec{k}')\times\vec{g}^{*}(\vec{k}')\right)\times\vec{g}(\vec{k}) = \left(\lambda(\vec{k}) + \frac{\rho W}{Z^3}\right)\cdot\vec{g}(\vec{k}); \qquad \text{(I,37)}$$

Für die Energie erhalten wir:

$$E = \sum_{\vec{k}} 16\left(g_3^{*}(\vec{k})\cdot\vec{\kappa}\cdot\vec{f}(\vec{k}') + g_3(\vec{k}')\,\vec{\kappa}\,\vec{f}^{*}(\vec{k}')\right) +$$

$$+\frac{32W}{Z^3}\cdot 16\sum_{\vec{k},\vec{k}'(\vec{k}'\neq\vec{k})}\left\{\left(\vec{g}(\vec{k})\times\vec{g}^{*}(\vec{k})\right)\cdot\left(\vec{g}(\vec{k}')\times\vec{g}^{*}(\vec{k}')\right) - \left(\vec{f}(\vec{k})\times\vec{f}^{*}(\vec{k})\right)\cdot\left(\vec{f}(\vec{k}')\times\vec{f}^{*}(\vec{k}')\right)\right\} +$$

$$+\frac{4W}{Z^3}\cdot 16\sum_{\vec{k}}\left\{\vec{f}^{*}(\vec{k})\,\vec{f}(\vec{k}) - \vec{g}^{*}(\vec{k})\,\vec{g}(\vec{k})\right\}; \qquad \text{(I,38)}$$

Oder unter Verwendung der Einteilchenenergieen $\lambda(\vec{k})$

$$E = \sum_{\vec{k}}\lambda(\vec{k}) + \frac{32W}{Z^3}\cdot 16\sum_{\vec{k},\vec{k}'(\vec{k}\neq\vec{k}')}\left\{\left(\vec{f}(\vec{k})\times\vec{f}^{*}(\vec{k})\right)\cdot\left(\vec{f}(\vec{k}')\times\vec{f}^{*}(\vec{k}')\right) -\right.$$

$$\left. -\left(\vec{g}(\vec{k})\times\vec{g}^{*}(\vec{k})\right)\cdot\left(\vec{g}(\vec{k}')\times\vec{g}^{*}(\vec{k}')\right)\right\} \qquad \text{(I,39)}$$

Die Diskussion des Eigenwertsystems wird übersichtlicher, wenn wir die Größen $\vec{g}(\vec{k})$ und $\vec{f}(\vec{k})$ gemäß $\vec{g}(\vec{k}) = \vec{g}'(\vec{k}) + i\,\vec{\kappa}(\vec{k})$ und $\vec{f}(\vec{k}) = \vec{\varphi}(\vec{k}) + i\,\vec{\pi}(\vec{k})$ in ihre Real- und Imaginärteile zerlegen, für die dann das folgende reele Gleichungssystem gilt:

$$2\cdot\gamma_3(\vec{k})\,\vec{\kappa} \;-\; \frac{32W\cdot 4i}{z^3}\,\vec{\mathcal{F}}(\vec{k})\times\vec{\pi}(\vec{k}) \;=\; \Big(\lambda(\vec{k})-\frac{\delta W}{z^3}\Big)\vec{\varphi}(\vec{k})\;;$$

$$2\cdot\varkappa_3(\vec{k})\,\vec{\kappa} \;+\; \frac{32W\cdot 4i}{z^3}\,\vec{\mathcal{F}}(\vec{k})\times\vec{\varphi}(\vec{k}) \;=\; \Big(\lambda(\vec{k})-\frac{\delta W}{z^3}\Big)\vec{\pi}(\vec{k})\;;$$

$$2\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\\vec{\kappa}\,\vec{\varphi}(\vec{k})\end{pmatrix} \;+\; \frac{32W\cdot 4i}{z^3}\,\vec{\mathcal{G}}(\vec{k})\times\vec{\varkappa}(\vec{k}) \;=\; \Big(\lambda(\vec{k})+\frac{\delta W}{z^3}\Big)\vec{\varphi}(\vec{k})\;;$$

$$2\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\\vec{\kappa}\,\vec{\pi}(\vec{k})\end{pmatrix} \;-\; \frac{32W\cdot 4i}{z^3}\,\vec{\mathcal{G}}(\vec{k})\times\vec{\varphi}(\vec{k}) = \Big(\lambda(\vec{k})+\frac{\delta W}{z^3}\Big)\vec{\kappa}(\vec{k})\;; \qquad \text{(I,40)}$$

Dabei ist: $$\vec{\mathcal{F}}(\vec{k}) = \sum_{\vec{k}'(\vec{k}'\neq\vec{k})} \vec{f}(\vec{k}')\times\vec{f}^{\,*}(\vec{k}') = 2i\sum_{\vec{k}'(\vec{k}'\neq\vec{k})}\vec{\pi}(\vec{k}')\times\vec{\varphi}(\vec{k}') \qquad \text{(I,41)}$$

und $$\vec{\mathcal{G}}(\vec{k}) = \sum_{\vec{k}'(\vec{k}'\neq\vec{k})} \vec{g}(\vec{k}')\times\vec{g}^{\,*}(\vec{k}') = 2i\sum_{\vec{k}'(\vec{k}'\neq\vec{k})}\vec{\varkappa}(\vec{k}')\times\vec{\varphi}(\vec{k}') \qquad \text{(I,42)}$$

In den folgenden Rechnungen werden wir das Gleichungssystem (I,40) manchmal etwas vereinfachen, indem wir den $\frac{\delta W}{z^3}$-Term bei $\lambda(\vec{k})$ weglassen und statt $\vec{\mathcal{F}}(\vec{k})$ und $\vec{\mathcal{G}}(\vec{k})$ Größen $\vec{\mathcal{F}}$ und $\vec{\mathcal{G}}$ einführen, die durch Summation über alle $\vec{k}'$ entstanden sind und unabhängig von $\vec{k}$ sind. Wir machen dabei einen Fehler der Ordnung $\frac{N}{z^3}$ bei der Berechnung der $\lambda(\vec{k})$, $\vec{\varphi}(\vec{k})$, $\vec{\pi}(\vec{k})$, $\vec{\varkappa}(\vec{k})$, $\vec{\kappa}(\vec{k})$ und einen Fehler der Ordnung W bei der Berechnung von E, solche Größenordnungen interessieren uns hier aber nicht. Eine weitere Vereinfachung des Systems (I,40) erreichen wir dadurch, daß wir $\varkappa_3(\vec{k})=0$ (für alle $\vec{k}$) wählen. Das ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit möglich, da es nur der Multiplikation von $|\varphi>$ mit einem Phasenfaktor $\prod_{\vec{k}}\frac{g_3^{\gamma}(\vec{k})}{|g_3(\vec{k})|}$ entspricht. Dabei fällt die dritte Gleichung des vierten Gleichungstripels von (I,40) weg, weil sie durch Variation nach $\varkappa_3(\vec{k})$ entstanden ist. Bei der Diskussion der Lösungen von (I,40) müssen wir mehrere Fallunterscheidungen treffen.

1) Sei $\gamma_3(\vec{k})=0$. Aus den ersten beiden Gleichungstripeln von (I,40) erhalten wir dann:

$$-\frac{32W\cdot 4i}{z^3}\,\vec{\mathcal{F}}\times\vec{\pi}(\vec{k}) \;=\; \lambda(\vec{k})\cdot\vec{\varphi}(\vec{k})$$

$$\frac{32W\cdot 4i}{z^3}\,\vec{\mathcal{F}}\times\vec{\varphi}(\vec{k}) \;=\; \lambda(\vec{k})\cdot\vec{\pi}(\vec{k}) \qquad \text{(I,43)}$$

1a) Sei $\lambda(\vec{k}) \neq 0$. Dann sind $\vec{\varphi}(\vec{k})$ und $\vec{\pi}(\vec{k})$ entweder beide gleich Null oder beide ungleich Null. Wir untersuchen zuerst die Möglichkeit

1aa) $\vec{\varphi}(\vec{k}) = \vec{0}$; $\vec{\pi}(\vec{k}) = \vec{0}$; Damit erhalten wir aus den letzten beiden Gleichungstripeln von (I,40) für $\vec{\gamma}(\vec{k})$ und $\vec{\kappa}(\vec{k})$ ebenfalls die Bedingung, daß $\vec{\gamma}(\vec{k})$ und $\vec{\kappa}(\vec{k})$ entweder beide gleich Null oder beide ungleich Null sind. Die erste Möglichkeit führt auf die triviale Lösung

1aaa) $\vec{\varphi}(\vec{k}) = \vec{0}$; $\vec{\pi}(\vec{k}) = \vec{0}$; $\vec{\gamma}(\vec{k}) = \vec{0}$; $\vec{\kappa}(\vec{k}) = \vec{0}$; Diese Lösung interessiert uns schon deshalb nicht, weil sie nicht zur Teilchenzahl $2Z^3$ führt. Die andere Möglichkeit ist

1aab) $\vec{\varphi}(\vec{k}) = \vec{0}$; $\vec{\pi}(\vec{k}) = \vec{0}$; $\vec{\gamma}(\vec{k})$, $\vec{\kappa}(\vec{k})$ sind beide ungleich Null. Das letzte Gleichungstripel von (I,40) ergibt in diesem Fall:

$$\frac{32W\cdot 4i}{Z^3}\; G_3(\vec{k})\cdot \gamma_2(\vec{k}) = \left(\lambda(\vec{k}) + \frac{8W}{Z^3}\right) \kappa_1(\vec{k})$$

$$-\frac{32W\cdot 4i}{Z^3}\; G_3(\vec{k})\cdot \gamma_1(\vec{k}) = \left(\lambda(\vec{k}) + \frac{8W}{Z^3}\right) \kappa_2(\vec{k}) \qquad \text{(I,44)}$$

Wir rechnen den Fall 1aab) übrigens nicht mit dem vereinfachten Gleichungssystem, bei dem die $\frac{8W}{Z^3}$ Terme weggelassen werden und $\vec{G}(\vec{k})$ und $\vec{F}(\vec{k})$ durch $\vec{G}$ und $\vec{F}$ ersetzt werden, sondern mit dem exakten Gleichungssystem. Die Lösungen sind in diesem Fall nämlich so einfach, daß dies ohne weiteres möglich ist. Aus dem dritten Gleichungstripel von (I,40) erhalten wir noch:

$$-\frac{32W\cdot 4i}{Z^3}\; G_3(\vec{k})\cdot \kappa_2(\vec{k}) = \left(\lambda(\vec{k}) + \frac{8W}{Z^3}\right) \gamma_1(\vec{k})$$

$$\frac{32W\cdot 4i}{Z^3}\; G_3(\vec{k})\, \kappa_1(\vec{k}) = \left(\lambda(\vec{k}) + \frac{8W}{Z^3}\right) \gamma_2(\vec{k}) \qquad \text{(I,45)}$$

$G_3(\vec{k}) = 0$ ist nicht möglich, da sonst wegen (I,44) und (I,45) $\vec{\gamma}(\vec{k}) = \vec{\kappa}(\vec{k}) = \vec{0}$ ist. Damit folgt aus (I,44) und (I,45):

$$\left(\lambda(\vec{k}) + \frac{8W}{Z^3}\right)^2 = -\left(\frac{32W\cdot 4}{Z^5}\; G_3(\vec{k})\right)^2 \qquad (G_3 \text{ ist rein imaginär})$$

Daraus folgt:

$$\left(\lambda(\vec{h}) + \frac{\delta W}{z^3}\right) = \lambda'(\vec{h})\,\frac{32W\cdot 4}{z^3}\,|G_3(\vec{h})|\,; \quad \lambda'(\vec{h}) = \pm 1\,, \qquad \text{(I,46)}$$

Wir nehmen an, daß wir an jedem Punkt $\vec{h}$ eine Lösung des Typs 1aab) haben. Dann gilt: $\vec{\vec{T}}(\vec{h}) = \vec{0}$; $G_1(\vec{h}) = 0$; $G_2(\vec{h}) = 0$

und $$G_3(\vec{h}) = i\sum_{\vec{h}'(\vec{h}'+\vec{h})} 2\cdot(\varkappa_1(\vec{h}')\gamma_2(\vec{h}') - \varkappa_2(\vec{h}')\gamma_1(\vec{h}')) \qquad \text{(I,47)}$$

Aus (I,45) erhält man folgende Beziehung:

$$\gamma_1(\vec{h}) = \frac{-G_3(\vec{h})}{|G_3(\vec{h})|\,\lambda'(\vec{h})}\,i\varkappa_2(\vec{h}) \quad ; \quad \gamma_2(\vec{h}) = \frac{G_3(\vec{h})}{|G_3(\vec{h})|\,\lambda'(\vec{h})}\,i\varkappa_1(\vec{h}) \qquad \text{(I,48)}$$

Daraus ergibt sich eine Selbstkonsistenzgleichung für $G_3(\vec{h})$:

$$G_3(\vec{h}) = -\frac{1}{8}\sum_{\vec{h}'(\vec{h}'+\vec{h})} \frac{G_3(\vec{h}')}{|G_3(\vec{h}')|}\,\lambda'(\vec{h}') \qquad \text{(I,49)}^{1}$$

Wir führen vermittels $G_3(\vec{h}) = iG_3'(\vec{h})$ ($G_3'(\vec{h})$ reell) reelle Größen ein. Damit schreiben wir (I,49) in der Form:

$$G_3'(\vec{h}) = -\frac{1}{8}\sum_{\vec{h}'} \frac{G_3'(\vec{h}')}{|G_3'(\vec{h}')|}\,\lambda'(\vec{h}') + \frac{1}{8}\,\frac{G_3'(\vec{h})}{|G_3'(\vec{h})|}\,\lambda'(\vec{h}) \qquad \text{(I,50)}$$

Der Wert der Summe ist gleich $\pm n\cdot\frac{1}{8}$ (n ganzzahlig) oder Null. Im Falle $-\frac{1}{8}\sum_{\vec{h}'}\frac{G_3'(\vec{h}')}{|G_3'(\vec{h}')|}\cdot\lambda'(\vec{h}') = 0$ ist $|G_3'(\vec{h})| = \frac{1}{8}$ für alle $\vec{h}$ und E ist damit proportional zu W. In allen anderen Fällen ist die rechte Seite von (I,50) semidefinit und es ist entweder $G_3'(\vec{h}) \geqslant 0$ für alle $\vec{h}$ oder $G_3'(\vec{h}) \leq 0$ für alle $\vec{h}$, wobei $G_3'(\vec{h}) = 0$ uninteressant ist, da dann E = 0 ist. Beide Möglichkeiten führen auf:

$$\sum_{\vec{h}'} \lambda'(\vec{h}') \underset{(-)}{\leqslant} 0\,; \qquad \text{(I,51)}$$

1) Dabei wurde die Normbedingung (I,24) verwendet.

Damit gilt für $G_3'(\vec{h})$:

$$G_3'(\vec{h}) = \pm \frac{1}{8} \sum_{\vec{h}'(\vec{h}' \neq \vec{h})} \lambda'(\vec{h}') \qquad \text{(I,52)}$$

Das Vorzeichen von $G_3'(\vec{h})$ können wir beliebig wählen, allerdings muß es dann für jedes $\vec{h}$ das gleiche sein. Aus (I,39) erhalten wir für die Energie:[1]

$$E = -\frac{8W}{Z^3} \left(\sum_{\vec{h}'} \lambda'(\vec{h}') \right)^2 \qquad \text{(I,52)}$$

Die Funktion $\lambda'(\vec{h}')$ muß, abgesehen von dem Fall $\sum_{\vec{h}'} \frac{G_3'(\vec{h}')}{|G_3'(\vec{h}')|} \lambda'(\vec{h}') = 0$ keiner Selbstkonsistenzbedingung mehr genügen. Sie kann bis auf die Einschränkung $\sum_{\vec{h}'} \lambda'(\vec{h}') < 0$ frei gewählt werden. Daraus folgt dann bis auf ein belangloses Vorzeichen $G_3'(\vec{h})$ und damit $\lambda(\vec{h})$; $\lambda(\vec{h})$ koppelt aber nach $\lambda'(\vec{h})$ nur über das Vorzeichen zurück, das wegen $\left(\frac{8W}{Z^3} + \lambda(\vec{h})\right) = \lambda'(\vec{h}) \frac{32W \cdot 4}{Z^3} |G_3(\vec{h})|$ automatisch richtig ist. Wir erhalten damit ein ganzes Spektrum von stationären Zuständen mit den Energien $E = -\frac{8W}{Z^3} \cdot n^2$ (n ganzzahlig). Die minimale Energie $-8WZ^3$ entspricht der Wahl $\lambda(\vec{h}) = -1$ für alle $\vec{h}$. $-8WZ^3$ ist zugleich der tiefste Energieeigenwert des Wechselwirkungsoperators H_W^B. Wir werden die Zustände mit dieser Energie bei der Behandlung der D-Darstellung noch ausführlicher diskutieren. Die Möglichkeiten für $\vec{\gamma}(\vec{h}) = \vec{0}$ und $\vec{\pi}(\vec{h}) = \vec{0}$ sind damit erschöpft und es bleibt:

1ab) $\vec{\gamma}(\vec{h})$ und $\vec{\pi}(\vec{h})$ sind beide ungleich Null. Wir untersuchen wieder der Einfachheit halber nur den Fall, wo $\gamma_3(\vec{h}) = 0$ und $\kappa_3(\vec{h}) = 0$ für alle $\vec{h}$ ist. Dann ist wieder $G_1(\vec{h}) = G_2(\vec{h}) = 0$ für alle $\vec{h}$. Wegen $\gamma_3(\vec{h}) = \kappa_3(\vec{h}) = 0$ entkoppeln im Eigenwertgleichungssystem (I,4o) die $\vec{\gamma}(\vec{h}), \vec{\pi}(\vec{h})$ von den $\vec{\gamma}(\vec{h})$ und $\vec{\kappa}(\vec{h})$, so daß für den Fall, daß alle vier Vektoren von Null verschieden sind, die folgenden beiden Gleichungen gleichzeitig erfüllt sein müssen.

1) genauere Ableitung siehe Anhang B2

$$(\lambda(\vec{k}) - \frac{8W}{z^3})^2 = -\left(\frac{32W\cdot 4}{z^3}\right)^2 \cdot \vec{F}^2(\vec{k}) \; ; \quad (\vec{k}\vec{F}(\vec{k}) = \vec{k}\vec{\Pi}(\vec{k}) = 0)$$

$$(\lambda(\vec{k}) + \frac{8W}{z^3})^2 = -\left(\frac{32W\cdot 4}{z^3}\right)^2 \cdot \sigma_3^2(\vec{k}) \qquad \text{(I,53)}$$

Da diese Lösungen in ihrer Struktur nicht sehr interessant sind,[1] ersetzen wir bei ihrer Diskussion $\vec{F}(\vec{k})$ und $\vec{\sigma}(\vec{k})$ durch $\vec{f} = \sum_{\vec{k}'} \vec{f}(\vec{k}') \times \vec{f}^{*}(\vec{k}')$ und $\vec{g} = \sum_{\vec{k}'} \vec{g}(\vec{k}') \times \vec{g}^{*}(\vec{k}')$. Wie schon erwähnt, ist der Fehler in E dann proportional zu W. Es gilt nun $\vec{f}^2 = \sigma_3^2$ und damit ist $E = \sum_{\vec{k}'} \lambda(\vec{k}')$. Mit $\lambda(\vec{k}') = \lambda'(\vec{k}')\left(\frac{32W\cdot 4}{z^3}\right)|\vec{F}|$ folgt daraus:

$$E = \frac{32W\cdot 4}{z^3}\,|\vec{F}| \cdot \sum_{\vec{k}'} \lambda'(\vec{k}') \qquad \text{(I,54)}$$

Die beiden Selbstkonsistenzgleichungen

$$\vec{F}(\vec{k}) = \frac{8\cdot 32W}{z^3} \sum_{\vec{k}'} \left\{ \frac{\vec{\Pi}^2(\vec{k}')}{\lambda(\vec{k}') - \frac{8W}{z^3}} \vec{F}(\vec{k}') \right\} - \frac{8\cdot 32W}{z^3} \frac{\vec{\Pi}^2(\vec{k})}{\lambda(\vec{k}) - \frac{8W}{z^3}} \vec{F}(\vec{k}) \qquad \text{(I,55)}^2$$

und

$$\sigma_3(\vec{k}) = -\frac{8\cdot 32W}{z^3} \sum_{\vec{k}'} \left\{ \frac{\vec{x}^2(\vec{k}')}{\lambda(\vec{k}') + \frac{8W}{z^3}} \sigma_3(\vec{k}') \right\} + \frac{8\cdot 32W}{z^3} \frac{x^2(\vec{k})}{\lambda(\vec{k}) + \frac{8W}{z^3}} \sigma_3(\vec{k}) \qquad \text{(I,56)}$$

liefern in dieser Vereinfachung die Relationen:

$$1 = \frac{32W\cdot 8}{z^3} \sum_{\vec{k}'} \frac{\vec{\Pi}^2(\vec{k}')}{\lambda(\vec{k}')} \quad \text{und} \quad -1 = \frac{32W\cdot 8}{z^3} \sum_{\vec{k}'} \frac{\vec{x}^2(\vec{k}')}{\lambda(\vec{k}')} \qquad \text{(I,57)}$$

Da wegen $g_3(\vec{k}) = \kappa_3(\vec{k}) = 0$ $\vec{x}^2(\vec{k}) = \vec{g}^2(\vec{k})$ und $\vec{p}^2(\vec{k}) = \vec{\Pi}^2(\vec{k})$ ist, gilt infolge der Normbedingung $\vec{\Pi}^2(\vec{k}) + \vec{x}^2(\vec{k}) + \vec{p}^2(\vec{k}) + \vec{g}^2(\vec{k}) = \frac{4}{8}$:

$$0 = \frac{32W\cdot 8}{z^3} \sum_{\vec{k}'} \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{\lambda(\vec{k}')} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{8|\vec{F}|} \sum_{\vec{k}'} \lambda'(\vec{k}') = 0 \qquad \text{(I,58)}$$

und damit $\sum_{\vec{k}'} \lambda(\vec{k}') = \Sigma = 0.$ (I,59)

1) Wegen der erwähnten Entkopplung

2) Man beachte $\vec{F}\cdot\vec{\Pi}(\vec{k}) = 0$

Wesentlich von Null verschiedene Lösungen sind im Fall 1ab) nur möglich, wenn wir $\vec{g}(\vec{h}) = \vec{\kappa}(\vec{h}) = \vec{0}$ wählen. Mit einer geeigneten Drehung können wir dann alle $\vec{F}^T(\vec{h})$ auf die Form (0, 0, $F_3(\vec{h})$) bringen. Die Gleichung (I,55) nimmt damit bis auf ein Vorzeichen die selbe Form wie (I,50) an.

$$F_3'(\vec{h}) = \frac{1}{8} \sum_{\vec{h}'} \frac{F_3'(\vec{h}')}{|F_3'(\vec{h}')|} \lambda'(\vec{h}') \qquad - \frac{1}{8} \frac{F_3'(\vec{h})}{|F_3'(\vec{h})|} \lambda'(\vec{h}) \qquad \text{(I,60)}$$

Wir haben also die gleichen Verhältnisse wie in 1aab), lediglich gilt hier wegen des anderen Vorzeichens $\sum_{\vec{h}'} \lambda'(\vec{h}') > 0$. Für die Energie ergibt sich: $E = \frac{\beta U}{2^3} \left(\sum_{\vec{h}'} \lambda'(\vec{h}') \right)^2$ (I,61)

Im Fall $\lambda'(\vec{h}) = 1$ für alle $\vec{h}$ ist $E = -8WZ^3$. Das entspricht dem maximalen Eigenwert von H_W^B.

1b) Sei $\lambda(\vec{h}) = 0$. Diese Möglichkeit ergibt Lösungen mit E = 0, da man zeigen kann, daß außer den Einteilchenenergien die anderen Anteile von E ebenfalls Null ergeben. Die Lösungen sind nicht so interessant, daß wir sie hier diskutieren wollen.

2) Sei $g_3(\vec{h}) \neq 0$[1]. Die Vektoren $\vec{\varphi}(\vec{h}), \vec{\pi}(\vec{h})$ einerseits und $\vec{g}(\vec{h}), \vec{\kappa}(\vec{h})$ andererseits entkoppeln nun nicht mehr, was die Lösungen komplizierter aber auch physikalisch interessanter macht, wofern $\lambda(\vec{h}) \neq 0$ ist. Wir nehmen deshalb für das Weitere

$\lambda(\vec{h}) \neq 0$ für alle $\vec{h}$ an.

2a) Sei $\vec{F}(\vec{h}) \neq \vec{0}$ für alle $\vec{h}$. Wir interessieren uns für die Lösungen mit $|\vec{F}(\vec{h})| \sim Z^3$, die Unterschiede von $\vec{F}(\vec{h})$ an verschiedenen Stellen $\vec{h}$ sind jedoch endlich (~ 1), so daß $|\vec{F}(\vec{h})|$ dann natürlich für alle $\vec{h}$ ungleich Null ist. Wir untersuchen nun die Lösungen des Eigensystems (I,40) an den Stellen $\vec{h}_0$ im reziproken Gitter, für die gilt: $\vec{F}(\vec{h}_0) \times \vec{\kappa}_0 \neq \vec{0}$

und $\vec{F}(\vec{h}_0) \cdot \vec{\kappa}_0 \neq 0$ (I,62)

Die Zahl der Punkte, die wir damit zunächst weglassen ist, proportional zu Z^2. Wir werden die Lösungen für diese Punkte

1) Und natürlich wie in allen anderen Fällen $x_3(\vec{h}) = 0$

nach der Behandlung der Stellen $\vec{h}_0$ diskutieren.
Aus den ersten sechs Gleichungen von (I,40) erhalten wir:

$$2\gamma_3(\vec{h}_0)\cdot\left(\vec{\varphi}(\vec{h}_0)\times\vec{K}_0\right) = -c\left(\vec{F}(\vec{h}_0)\,\vec{\varphi}(\vec{h}_0)\right)\vec{\Pi}(\vec{h}_0), \quad c=\frac{32N\cdot 4i}{z^3} \qquad (I,63)$$

$\vec{F}(\vec{h}_0)\cdot\vec{\varphi}(\vec{h}_0)=0$ ist nicht möglich, denn aus $\vec{\varphi}(\vec{h}_0)=\vec{0}$ folgt $\vec{\Pi}(\vec{h}_0)=0$ und $\gamma_3(\vec{h}_0)=0$ und damit die triviale Lösung, andererseits ist $\vec{\varphi}(\vec{h}_0)\neq\vec{0}$ und $\vec{F}\cdot\vec{\varphi}=0$ nur möglich, wenn $\vec{F}(\vec{h}_0)\vec{K}_0=0$ ist. Das widerspricht aber der Definition der $\vec{h}_0$. Wegen $\vec{F}(\vec{h}_0)\times\vec{K}_0\neq\vec{0}$ gilt auch $\vec{\Pi}(\vec{h}_0)\neq\vec{0}$ und wir können (I,63) nach $\vec{\Pi}(\vec{h}_0)$ auflösen.

$$\vec{\Pi}(\vec{h}_0) = -\frac{2\gamma_3(\vec{h}_0)}{c\cdot(\vec{F}(\vec{h}_0)\cdot\vec{\varphi}(\vec{h}_0))}\cdot\vec{\varphi}(\vec{h}_0)\times\vec{K}_0 \qquad (I,64)$$

Damit erhalten wir mit (I,40):

$$\vec{\Pi}(\vec{h}_0) = c\cdot\frac{2\gamma_3(\vec{h}_0)}{\left(\left(\lambda(\vec{h}_0)-\frac{\partial W}{z^3}\right)^2-c^2\vec{F}^2(\vec{h}_0)\right)}\cdot\vec{F}(\vec{h}_0)\times\vec{K}_0 \qquad (I,65)$$

und

$$\vec{\varphi}(\vec{h}_0) = \frac{2\gamma_3(\vec{h}_0)\left(\lambda(\vec{h}_0)-\frac{\partial W}{z^3}\right)\left(\vec{K}_0-c^2\frac{(\vec{F}(\vec{h}_0)\cdot\vec{K}_0)}{\left(\lambda(\vec{h}_0)-\frac{\partial W}{z^3}\right)^2}\cdot\vec{F}(\vec{h}_0)\right)}{\left(\lambda(\vec{h}_0)-\frac{\partial W}{z^3}\right)^2-c^2\vec{F}^2(\vec{h}_0)} \qquad (I,66)$$

Da $\vec{F}(\vec{h}_0)\vec{K}_0\neq 0$ und $\vec{F}(\vec{h}_0)\times\vec{K}_0\neq\vec{0}$ ist, muß auch $\left(\lambda(\vec{h}_0)-\frac{\partial W}{z^3}\right)^2-c^2\vec{F}^2(\vec{h}_0)$ ungleich Null sein.[1] Aus den letzten beiden Gleichungstripeln von (I,40) folgt:

$$2\vec{K}_0\vec{\varphi}(\vec{h}_0) = \left(\lambda(\vec{h}_0)+\frac{\partial W}{z^3}\right)\gamma_3(\vec{h}_0)\cdot\frac{c^2\sigma_3^2(\vec{h}_0)-\left(\lambda(\vec{h}_0)+\frac{\partial W}{z^3}\right)^2}{c^2\sigma_3^2(\vec{h}_0)-\left(\lambda(\vec{h}_0)+\frac{\partial W}{z^3}\right)^2} \qquad (I,67)$$

Die Möglichkeit $\left(\lambda(\vec{h}_0)+\frac{\partial W}{z^3}\right)^2=c^2\sigma_3^2(\vec{h}_0)$ führt entweder auf die schon in 1ab) untersuchten Lösungen mit $\gamma_3(\vec{h}_0)=0$ oder auf Lösungen, die nur für eine beschränkte Anzahl von Punkten ($\sim z^2$ Punkte) möglich sind, da für diese Punkte gelten muß $c^2(\sigma_3^2(\vec{h}_0)-\vec{F}^2(\vec{h}_0))=4\vec{K}_0^2-4(\vec{K}_0\cdot\vec{F}(\vec{h}_0))^2\cdot\sigma_3^{-2}(\vec{h}_0)$

1) folgt aus den ersten beiden Gleichungen von (I,40). Man beachte dabei $\gamma_3(\vec{h}_0)\neq 0$.

(Bei der Herleitung dieser Gleichung ist ein um einen Faktor $\frac{W}{\Sigma^3}$ kleinerer Term vernachlässigt werden, was für die Argumentation belanglos ist). Wir rechnen deshal mit $(\lambda(\vec{k}_0)+\frac{\delta W}{\Sigma^3})^2 \neq c^2 G_3^2(\vec{k}_0)$. Damit erhalten wir aus (I,65), (I,66), (I,67) eine Eigenwertgleichung für die Einteilchenenergie

$$\frac{\left(4\vec{k}_0^2 - c^2 \cdot 4 \cdot (\vec{k}_0 \vec{F}(\vec{k}_0))^2 \frac{1}{(\lambda(\vec{k}_0) - \frac{\delta W}{\Sigma^3})^2}\right)(\lambda(\vec{k}_0) - \frac{\delta W}{\Sigma^3})}{(\lambda(\vec{k}_0) - \frac{\delta W}{\Sigma^3})^2 - c^2 \vec{F}^2(\vec{k}_0)} =$$

$$= (\lambda(\vec{k}_0) + \frac{\delta W}{\Sigma^3}) \cdot \frac{c^2 \vec{G}^2(\vec{k}_0) - (\lambda(\vec{k}_0) + \frac{\delta W}{\Sigma^3})^2}{c^2 G_3^2(\vec{k}_0) - (\lambda(\vec{k}_0) + \frac{\delta W}{\Sigma^3})^2} \qquad \text{(I,68)}$$

Die Gleichung ist einigermaßen unschön, wenn wir nicht als Vereinfachung die $\frac{\delta W}{\Sigma^3}$ Terme weglassen und $\vec{F}(\vec{k}_0)$ durch $\vec{F} = 2i \cdot \sum_{\vec{k}} \vec{n}(\vec{k}) \times \vec{p}(\vec{k})$ entsprechend $G(\vec{k}_0)$ und $\vec{G}$ ersetzen. Die Auswirkung der Fehler, die wir dabei begehen, haben wir schon diskutiert. Statt (I,68) untersuchen wir also:

$$\frac{\left(4\vec{k}_0^2 - c^2 4 (\vec{k}_0 \vec{F})^2 \frac{1}{\lambda^2(\vec{k}_0)}\right)}{\lambda^2(\vec{k}_0) - c^2 \vec{F}^2} = \frac{c^2 \vec{G}^2 - \lambda^2(\vec{k}_0)}{c^2 G_3^2 - \lambda^2(\vec{k}_0)} \qquad \text{(I,69)}$$

Man sieht sofort, daß die Lösungen von (I,69) für $W \to 0$ den Diracsee der masselosen Fermionen ergeben.[1] Die allgemeine Lösung wird ziemlich schwierig, da zu (I,69) noch die folgenden Selbstkonsistenzbedingungen hinzukommen:

$$\vec{F}' = \sum_{\vec{k}_0} \frac{(2\gamma_3(\vec{k}_0))^2 \cdot 2c' \cdot \lambda(\vec{k}_0)}{(\lambda^2(\vec{k}_0) - c'^2 \vec{F}'^2)^2} \cdot \left(\vec{F}' \vec{k}_0^2 - \vec{k}_0 (\vec{F}' \cdot \vec{k}_0)\right) + \sum_{\vec{k}(\vec{k} \neq \vec{k}_0)} T(\vec{k}) \qquad \text{(I,70)}^2$$

$$\vec{0} = \sum_{\vec{k}_0} \frac{c'^3 (2\gamma_3(\vec{k}_0))^2 \cdot (\vec{k}_0 \vec{F}')}{\lambda(\vec{k}_0)(\lambda^2(\vec{k}_0) - c'^2 \vec{F}'^2)^2} \cdot \left((\vec{k}_0 \cdot \vec{F}') \cdot \vec{F}' - \vec{k}_0 \vec{F}'^2\right) + \sum_{\vec{k}(\vec{k} \neq \vec{k}_0)} S(\vec{k}) \qquad \text{(I,71)}^3$$

1) wegen des Begriffes "Diracsee der masselosen Fermionen" s. l.c.IV

2) siehe Anhang B3

3) siehe Anhang B3

$$\vec{G}' = -\begin{pmatrix} \sum_{\vec{h}} \frac{2c' \gamma_3^2(\vec{h})\, \lambda(\vec{h})}{(\lambda^2(\vec{h}) - c'^2 G_3'^2)}\, G_1' \\ \sum_{\vec{h}} \frac{2c' \gamma_3^2(\vec{h})\, \lambda(\vec{h})}{(\lambda^2(\vec{h}) - c'^2 G_3'^2)}\, G_2' \\ \sum_{\vec{h}} \frac{2c' \gamma_3^2(\vec{h})\, \lambda(\vec{h})\,(c'^2 \vec{G}'^2 - c'^2 G_3'^2)}{(\lambda^2(\vec{h}) - c'^2 G_3'^2)^2}\, G_3' \end{pmatrix} \qquad (I,72)^1$$

Dabei ist $\vec{F}' = -i\vec{F}$, $c' = \frac{32 \cdot 4W}{Z^3}$, $\vec{G}' = -i\vec{G}$ also $\vec{F}', \vec{G}', c'$ reell.

Die Summen $\sum_{\vec{h}(\vec{h} \neq \vec{h}_0)} T(\vec{h})$ und $\sum_{\vec{h}(\vec{h} \neq \vec{h}_0)} S(\vec{h})$ kommen von den Lösungen bei $\vec{h} \neq \vec{h}_0$. Wir werden sie noch genauer angeben. Für die folgenden Überlegungen können wir sie weglassen, da ihr Beitrag zu (I,70) und (I,71) so gering ist, daß er diese Überlegungen nicht berührt. Der Grund dafür ist, daß die Zahl der Punkte $\vec{h} \neq \vec{h}_0$ proportional zu $Z^2 + Z$ ist. Im übrigen ist leicht zu zeigen, daß ihr Beitrag so ist, daß er das Folgende noch bestätigt.

Aus der Normbedingung erhalten wir noch eine Gleichung für $\gamma_3^2(\vec{h})$

$$\gamma_3^2(\vec{h}_0) = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{4c'^2(\vec{K}_0^2 \vec{F}'^2 - (\vec{K}_0 \vec{F}')^2)}{(\lambda^2(\vec{h}_0) - c'^2 \vec{F}'^2)^2} + \frac{c'^2 G_3'^2 (c'^2 \vec{G}'^2 - c'^2 G_3'^2)}{(\lambda^2(\vec{h}_0) - c'^2 G_3'^2)^2}\right)^{-1} \qquad (I,73)^2$$

($\gamma_3^2(\vec{h})$ für $\vec{h} \neq \vec{h}_0$ wird noch angegeben, im Augenblick sind diese Größen belanglos)

Aus (I,70) können wir die folgende Beziehung ableiten:

$$\vec{F}'^2 = \sum_{\vec{h}_0} \frac{(2\gamma_3(\vec{h}_0))^2 \cdot 2c'}{(\lambda^2(\vec{h}_0) - c'^2 \vec{F}'^2)^2} \left(\vec{F}'^2 \vec{K}_0^2 - (\vec{F}' \vec{K}_0)^2\right) \lambda(\vec{h}_0) + O(Z^2) \qquad (I,74)$$

1) siehe Anhang B4

2) siehe Anhang B5

Da $\vec{F}'^2 \geq 0$ und sign $\frac{(2\beta_3(\vec{k}_0))^2 \cdot 2c'}{(\lambda^2(\vec{k}_0) - c'^2\vec{F}'^2)^2}\left(\vec{F}'^2\vec{k}_0^2 - (\vec{F}'\vec{k}_0)^2\right)$ = sign W ist, muß für die Mehrzahl der $\lambda(\vec{k}_0)$ gelten: Sign $\lambda(\vec{k}_0)$ = sign W. (In der Summe gibt es übrigens keine Polterme, die so groß sind, daß sie im Wesentlichen die Summe bestimmen würden und damit die Vorzeichenüberlegungen außer Kraft setzen würden. Es ist nämlich jeder Summand $\leq \frac{1}{8}$.) Aus der dritten Gleichung von (I,72) folgt mit $G_3 \neq 0$:

$$1 = -\frac{32N\cdot 4}{\mathcal{Z}^3} \sum_{\vec{k}} \frac{2\beta_3^2(\vec{k})(c'^2\vec{G}'^2 - c'^2G_3'^2)}{(\lambda^2(\vec{k}) - c'^2G_3'^2)^2} \cdot \lambda(\vec{k}) \qquad \text{(I,75)}$$

Daraus leitet man die Bedingung ab, daß das überwiegende Vorzeichen von $\lambda(\vec{k})$ gleich $-\mathrm{sign}\, W$ sein muß. Die Vorzeichenbedingungen aus (I,74) und (I,75) zusammen zeigen, daß keine Lösung mit $|\vec{F}'| \sim \mathcal{Z}^3 \wedge |G_3'| \sim \mathcal{Z}^3 \wedge |\vec{G}'| \sim \mathcal{Z}^3$ und $\lambda(\vec{k}) \sim \sqrt{\mathcal{Z}}$ möglich sind.[1] Insbesondere sind unter den möglichen Lösungen nicht die mit minimaler Energie. Besonders einfach ist der Fall übrigens bei großem W, weil dann $\lambda(\vec{k})$ sich nur unwesentlich mit $\vec{k}$ ändert.[2] Da wir uns für die tiefsten Energien interessieren, können wir uns also auf die drei Grenzfälle $G_3' = 0$, $(c'^2\vec{G}'^2 - c'^2G_3'^2) = 0$ und $\vec{F}' = \vec{0}$ beschränken. Zunächst untersuchen wir die ersten beiden Möglichkeiten, weil wir noch mit $\vec{F}' \neq \vec{0}'$ rechnen. Für $\vec{F}' \neq \vec{0}$ (d.h. $|\vec{F}'| \sim \mathcal{Z}^3$) müssen wir W negativ wählen, wenn wir minimale Energien erreichen wollen. Die $\lambda(\vec{k})$ können dann wegen (I,74) alle negativ sein. Wenn nun $G_3 = 0$ ist, sind die Nenner in den ersten beiden Gleichungen von (I,72) immer positiv, mit $W < 0$ und $\lambda(\vec{k}) < 0$ für die überwiegende Mehrheit von $\lambda(\vec{k})$ sind diese Gleichungen nicht zu erfüllen und es muß $G_1 = G_2 = 0$ und damit $\vec{G} = \vec{0}$ sein. $(c'^2\vec{G}'^2 - c'^2G_3'^2) = 0$ führt wegen (I,72) ebenfalls auf $\vec{G} = \vec{0}$, so daß für die tiefliegenden Energien

1) mit $\wedge$ ist das logische Zeichen gemeint

2) siehe (I,76)

bei $\vec{F} \neq \vec{0}$ immer $\vec{G} = \vec{0}$ ist. Aus (I,69) folgt dann:

$$\lambda^2(\vec{k}_0) = \frac{1}{2}(c'^2\vec{F}'^2 + 4\vec{k}_0^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(c'^2\vec{F}'^2 - 4\vec{k}_0^2)^2 + 16(c'^2\vec{k}_0^2\vec{F}'^2 - c'^2(\vec{k}_0\vec{F}')^2)} \qquad \text{(I,76)}$$

Das charakteristische an diesen Lösungen ist, daß eine Richtungsabhängigkeit der $\lambda(\vec{k}_0)$ besteht. Die Extremfälle sind $\vec{k}\,\vec{F} = 0$ und $\vec{k} \parallel \vec{F}$. Da in diesen Fällen $\vec{h} \neq \vec{h}_0$ ist, müssen wir diese Lösungen noch diskutieren.

Sei $\vec{k}\,\vec{F} = 0$. Hier gibt es neben einer Lösung mit $\lambda^2(\vec{k}) = c'^2\vec{F}'^2$ die folgende Lösung:

$$\vec{p}(\vec{k}) = 2\gamma_3(\vec{k}) \cdot \lambda(\vec{k}) \cdot \frac{\vec{K}}{4\vec{K}^2} \quad ; \quad \vec{\Pi}(\vec{k}) = -2\gamma_3(\vec{k}) \cdot c' \cdot \frac{\vec{F}' \times \vec{K}}{4\vec{K}^2}$$

$$\text{mit } \lambda^2 = 4\vec{K}^2 + c'^2\vec{F}'^2 \quad \text{und} \quad \gamma_3^2(\vec{k}) = \frac{1}{16}\left(\frac{4\vec{K}^2}{4\vec{K}^2 + c'^2\vec{F}'^2}\right) \qquad \text{(I,77)}$$

Dieses Ergebnis fügt sich, wenn man in (I,76) das positive Vorzeichen nimmt, in die für $\vec{h} = \vec{h}_0$ erhaltenen Resultate ein, da man in (I,66), (I,67), (I,73) nur $\vec{k}_0\,\vec{F} = 0$ zu setzen braucht um es zu erhalten. Für $\vec{k} \parallel \vec{F}$ gibt es die folgenden beiden Lösungen:

$$\vec{p}(\vec{k}) = \frac{2\gamma_3(\vec{k})}{\lambda(\vec{k})}\vec{K} \quad ; \quad \vec{\Pi}(\vec{k}) = \vec{0}$$

$$\text{mit } \lambda^2(\vec{k}) = 4\vec{K}^2 \text{ und } \gamma_3^2(\vec{k}) = \frac{1}{16} \qquad \text{(I,78)}$$

$$\text{sowie } \vec{p}(\vec{k}) = \frac{1}{4}\vec{a} \quad ; \quad \vec{\Pi}(\vec{k}) = -\frac{c'\vec{F}'}{4\lambda(\vec{k})} \times \vec{a}$$

$$\text{mit } \lambda^2(\vec{k}) = c'^2\vec{F}'^2 \text{; } \vec{a} \text{ : beliebiger reeller Vektor mit } \vec{a}\,\vec{F} = 0 \qquad \text{(I,79)}$$

$$\text{und } |\vec{a}| = 1$$

Wenn wir das positive Vorzeichen in (I,76) nehmen, ist (I,78) Grenzwert von (I,66), (I,67), (I,73) und (I,76) für $c'^2\vec{F}'^2 \leq 4\vec{K}^2$ *. (I,78) ergibt wegen $\vec{\Pi}(\vec{k}) \neq \vec{0}$ keinen Beitrag zu den Selbstkonsistenzbedingungen, (I,79) liefert pro Punkt einen

*) (I,79) ist Grenzwert von (I,66), (I,67), (I,73), (I,76) für $c'^2\vec{F}'^2 > 4\vec{K}^2$

Beitrag $\frac{c'}{8}\cdot\lambda^{-1}(\vec{k})\vec{F}'$. Wir belegen die Punkte $\vec{h}\parallel\vec{F}$ so mit den Lösungen (I,78) und (I,79), daß sie Grenzwerte von (I,66), (I,67), (I,73) und (I,76) mit positivem Vorzeichen sind. Die Selbstkonsistenzbedingungen nehmen dann die folgende Form an:

$$\vec{F}' = \sum_{\vec{h},\,\vec{h}\neq\vec{F}'} \frac{(2\beta_3(\vec{h}))^2 2c'\cdot\lambda(\vec{k})}{(\lambda^2(\vec{k})-c'^2\vec{F}'^2)^2}\left(\vec{F}'\cdot\vec{K}^2-\vec{K}(\vec{F}'\vec{K})\right) + \\ + \frac{c'}{8}\sum_{\vec{h},\,\vec{h}\parallel\vec{F}'}\theta\left(c'^2\vec{F}'^2-4\vec{K}^2\right)\lambda^{-1}(\vec{h})\cdot\vec{F}' \qquad (I,80)^1$$

$$\vec{0} = \sum_{\vec{h}} \frac{c'^3(2\beta_3(\vec{h}))^2(\vec{F}'\vec{K})}{\lambda(\vec{h})(\lambda^2(\vec{k})-c'^2\vec{F}'^2)^2}\left((\vec{K}\vec{F}')\vec{F}'-\vec{K}\vec{F}'^2\right) \qquad (I,81)$$

Die Gleichung (I,81) bedeutet im Gitterraum eine starke Einschränkung für $\vec{F}'$. Während nähmlich (I,81) für jede Richtung von $\vec{F}'$ lösbar ist, wenn der Raum der $\vec{k}$-Vektoren durch Drehungen um $\vec{F}'$ in sich übergeführt wird, kann $\vec{F}'$ im Gitterraum nur einige wenige bestimmte Richtungen haben, um Gleichung (I,81) zu erfüllen. Man kann nämlich zeigen, indem man den Würfel des $\vec{k}$-Raumes in Scheiben senkrecht zu $\vec{F}'$ zerlegt, daß die Summe auf der rechten Seite von (I,81) nur dann Null werden kann, wenn es Drehungen um Winkel ungleich 0° oder 360° gibt, mit $\vec{F}'$ als Achse, die den Würfel in sich überführen. Damit kann $\vec{F}'$ nur die folgenden Richtungen haben:

$$\vec{F}' \parallel \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} \qquad m_i \in \{-1, 0, +1\} \qquad (I,82)$$

Die entsprechenden Drehungen haben die Winkel 90°, 120° und 180°.

1) die θ -Funktionen in der zweiten Summe kommt dadurch zustande, daß für die Lösung (I,78) $\vec{\pi}(\vec{k})\times\vec{\varphi}(\vec{k})=\vec{0}$ ist, während für die Lösung (I,79) $\vec{\pi}(\vec{k})\times\vec{\varphi}(\vec{k}) = \frac{c'\vec{F}'}{16\lambda(\vec{k})}$ ist.

Wir nennen den Zustand, den wir als Lösung des Variationsproblems mit $\vec{F} \neq \vec{0}$ erhalten, $|\vec{F}\rangle$.

$$|\vec{F}\rangle = \prod_{\vec{k}} \varphi^{+}(\vec{k}) \{ (\vec{p}(\vec{k}) + i\vec{v}(\vec{k}))\vec{\sigma}\sigma_2\beta_2 + \gamma_3(\vec{k})\beta_3\beta_2\sigma_2 \} \varphi^{+}(\vec{k})|0\rangle \qquad (I,83)$$

$\vec{p}(\vec{k})$, $\vec{v}(\vec{k})$ und $\gamma_3(\vec{k})$ ergeben sich aus (I,66), (I,67), (I,73) und (I,78) bzw. (I,79) wie festgelegt. Wegen (I,39) können die $\frac{\lambda(\vec{k})}{2}$ als Einteilchenenergien in diesem Zustand interpretiert werden.[1] Für Teilchen, die senkrecht zu $\vec{F}'$ laufen, ist $\frac{\lambda(\vec{k})}{2} = \sqrt{\vec{k}^2 + \frac{c'^2\vec{F}'^2}{4}}$, sie verhalten sich also wie Fermionen mit der Masse $\frac{1}{2}\cdot c'|\vec{F}'|$, während für Teilchen mit $\vec{k} \parallel \vec{F}$, wofern $|\vec{k}| \gg \frac{|c'||\vec{F}'|}{2}$ ist, die Einteilchenenergie $\frac{\lambda(\vec{k})}{2} = |\vec{k}|$ ist wie bei masselosen Fermionen. Im Falle $|\vec{k}| < \frac{|c'||\vec{F}'|}{2}$ ist $\frac{\lambda(\vec{k})}{2}$ gleich $\frac{c'|\vec{F}'|}{2}$ also impulsunabhängig. Man kann die Beiträge der Punkte $\vec{k}'$ mit $\vec{k}' \parallel \vec{F}$ und $|\vec{k}'| < \frac{|c'||\vec{F}'|}{2}$ zu $|\vec{F}\rangle$ in die Form $\varphi^{+}(\vec{k}')A(\vec{k}')\varphi^{+}(-\vec{k}')$ umkoppeln und als gebundene Paare mit Gesamtimpuls Null und der Bindungsenergie $\frac{c'|\vec{F}'|}{2}$ interpretieren. Ein wesentlicher Gitterraumeffekt bei der Lösung $|\vec{F}\rangle$ ist die Tatsache, daß die Vorzugsrichtung $\vec{F}'$ gemäß (I,82) durch die Hauptachsen des Gitters gegeben ist. Für die entsprechend (I,82) gewählten $\vec{F}'$ ist auch die rechte Seite von (I,80) ein Vektor mit der gleichen Richtung wie $\vec{F}'$, sodaß sich die Selbstkonsistenzbedingungen (I,80) und (I,81) auf eine Selbstkonsistenzbedingung für $\vec{F}'^2$ reduzieren.

$$\vec{F}'^2 = c' \sum_{\vec{k},\vec{k}\neq\vec{F}'} \frac{\delta\gamma_3^2(\vec{k})A(\vec{k})}{(\lambda^2(\vec{k}) - c'^2\vec{F}'^2)^2} \cdot (\vec{F}'^2\vec{k}^2 - (\vec{F}'\vec{k})^2) +$$

$$+ \frac{c'}{\delta} \sum_{\vec{k},\vec{k}\parallel\vec{F}} \theta(c'^2\vec{F}'^2 - 4\vec{k}^2)\lambda^{-1}(\vec{k})\vec{F}'^2 \quad ;$$

$$\lambda(\vec{k}) = -\sqrt{\frac{1}{2}(c'^2\vec{F}'^2 + 4\vec{k}^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(c'^2\vec{F}'^2 - 4\vec{k}^2) + 16c'^2(\vec{F}'^2\vec{k}^2 - (\vec{F}'\vec{k})^2)}}$$

$\gamma_3^2(\vec{k})$ gemäß (I,73) (I,84)

[1]) siehe Anhang B6

Wie im Anhang A gezeigt wird, ist die Selbstkonsistenzbedingung (I,84) lösbar, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$1+\frac{c'}{16}\sum_{\vec{k}}\frac{\sin^2\theta}{|\vec{k}|}<0\ ;\quad \sin^2\theta=\frac{\vec{F}^2\vec{k}^2-(\vec{F}\vec{k})^2}{\vec{F}^2\cdot\vec{k}^2} \tag{I,85}$$

Es sei noch einmal daran erinnert, daß wir für die Lösung $|\vec{F}\rangle$ die Kopplungskonstante negativ gewählt haben. Mit der Beziehung $\sum_{\vec{k}}\frac{\sin^2\theta}{|\vec{k}|}=\frac{2}{3}\sum_{\vec{k}}\frac{1}{|\vec{k}|}$ können wir (I,85) noch etwas vereinfachen:

$$8W<-\frac{1}{\frac{1}{2^2}\cdot\frac{2}{3}\sum_{\vec{k}}\frac{1}{|\vec{k}|}} \tag{I,86}$$

Die Funktion $\sum\frac{1}{|\vec{k}|}$ wurde von Lagally[1] berechnet. Mit seinem Ergebnis $\sum_{\vec{k}}\frac{1}{|\vec{k}|}=0{,}91\left(\frac{\sqrt{2}}{L}\right)^{-1}$ und dem ebenfalls von Lagally errechneten Zahlenwert $\sum_{\vec{k}}e^{-2|\vec{k}|}=-2+1{,}1938\,\frac{\sqrt{2}}{L}$ können wir (I,85) eine physikalisch anschaulichere Form geben:

$$8WZ^3<-0{,}571\cdot\sum_{\vec{k}}2\cdot|\vec{k}|\quad(W<0!) \tag{I,87}$$

Dabei ist $8WZ^3$ die Grundzustandsenergie von H_W^B und $-\sum_{\vec{k}}2\cdot|\vec{k}|$ die Grundzustandsenergie von H_{Bew}. Die Energie des Zustandes $|\vec{F}\rangle$ erhalten wir aus (I,39). Auf Grund der im Anhang A ausgeführten Rechnungen können wir, vorausgesetzt, daß (I,85) erfüllt ist, die folgenden Aussagen machen:

1. Der Energieerwartungswert in $|\vec{F}\rangle$ liegt immer sowohl unterhalb von $8WZ^3$ als auch unterhalb der Energie des Diracsees der masselosen Urfermionen, die unabhängig von W gleich $-\sum_{\vec{k}}2|\vec{k}|$ ist.
2. Für $W\to\infty$ geht die Energie von $|\vec{F}\rangle$ gegen $8WZ^3$.
3. Für $W\to 0$ geht die Energie von $|\vec{F}\rangle$ gegen $-\sum_{\vec{k}}2|\vec{k}|$.

Damit haben wir die physikalisch interessanten Lösungen des

1) L.c.IV

Variationsproblems mit $\vec{F}' \neq \vec{0}$ diskutiert und es bleibt noch die Untersuchung der Lösungen mit $\vec{F} = \vec{0}$ und $\vec{G} \neq \vec{0}$.

2b) Sei $\vec{F} = \vec{0}$. Die Eigenwertgleichung (I,69) ist in diesem Fall leicht zu lösen, man erhält:

$$\lambda^2(\vec{k}) = \frac{4\vec{k}^2 + c'^2\vec{G}'^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(4\vec{k}^2 + c'^2\vec{G}'^2)^2 - 16\vec{k}^2 c'^2 G_3'^2} \qquad (I,88)$$

Aus der dritten Gleichung der Selbstkonsistenzbedingungen (I,72) für $\vec{G}$ kann man für $G_3 \neq 0$ folgende Beziehung ableiten:[1]

$$c' \sum_{\vec{k}} \lambda(\vec{k}) \frac{\gamma_3^2(\vec{k})(\lambda^2(\vec{k}) - c'^2\vec{G}'^2)}{(\lambda^2(\vec{k}) - c'^2 G_3'^2)^2} = 0 \qquad (I,89)$$

Um zu tiefliegenden Zuständen zu gelangen, müssen wir bei $\lambda^2(\vec{k})$ in der überwiegenden Mehrzahl das + Zeichen und für $\lambda(\vec{k})$ die negative Wurzel nehmen. Damit ist jedoch (I,89) nicht erfüllbar. Es muß deswegen $G_3 = 0$ sein, was übrigens $\lambda^2(\vec{k})$ noch zusätzlich größer macht.
Mit $G_3 = 0$ hat dann $\lambda^2(\vec{k})$ die vertraute Form

$$\lambda^2(\vec{k}) = 4\vec{k}^2 + c'^2\vec{G}'^2 \qquad (I,90)$$

Das Verhältnis von G_1' zu G_2' kann beliebig sein, da das Gleichungssystem (I,40) wegen der γ_5 (in unserer Darstellung β_3) Invarianz gegenüber Drehungen um die G_3' Achse invariant ist. Aus den ersten beiden Gleichungen (I,72) sieht man noch, daß c' und damit W positiv sein muß, damit diese Lösungen tief liegen.
Das Gleichungssystem (I,40) hat nun die folgende Lösung:

$$\vec{\varphi}(\vec{k}) = \frac{\vec{k}}{2\lambda(\vec{k})} \; ; \; \vec{\pi}(\vec{k}) = \vec{0} \; ; \; \gamma_3(\vec{k}) = \frac{1}{4} \; ; \; \kappa_4(\vec{k}) = \frac{c'G_2'}{4\lambda(\vec{k})}$$
$$\chi_2(\vec{k}) = -\frac{c'G_1'}{4\lambda(\vec{k})} \qquad \lambda(\vec{k}) = -\sqrt{4\vec{k}^2 + c'^2G_1'^2 + c'^2G_2'^2} \qquad (I,91)$$

1) dabei muß $G_1'^2 + G_2'^2 \neq 0$ gelten. Aus $G_1'^2 + G_2'^2 = 0$ folgt $\vec{G}'^2 = 0$.

Wir setzen $c'G_1' = -2m_1$; $c'G_2' = -2m_2$; (I,92)

Damit erhält man als Lösung des Variationsproblems den Zustand:

$$|\vec{G}\rangle = \prod_{\vec{k}} \gamma^+(\vec{k}) \Big\{ \frac{\vec{k}\vec{\sigma}\sigma_2\rho_2}{2\lambda(\vec{k})} - \frac{i}{4}\rho_1\sigma_2 + \frac{i m_1}{2\lambda(\vec{k})}\sigma_2 + \frac{m_2}{2\lambda(\vec{k})}\rho_3\sigma_2 \Big\} \gamma^+(\vec{k})|0\rangle \qquad (I,93)$$

Dieser Zustand erlaubt eine einfache physikalische Interpretation, da er Eigenzustand des Operators

$$D_M = \sum_{\vec{k}} \gamma^+(\vec{k}) \left(\rho_3 \vec{k}\vec{\sigma} - m_1\rho_1 + m_2\rho_2 \right) \gamma(\vec{k}) \qquad (I,94)$$

ist. Es gilt: $D_M |\vec{G}\rangle = \left(\sum_{\vec{k}} \lambda(\vec{k}) \right) |\vec{G}\rangle$ (I,95)

$|\vec{G}\rangle$ ist also der Grundzustand von D_M. $\lambda(\vec{k})$ ist in der neuen Bezeichnungsweise gleich $-\sqrt{\vec{k}^2 + m_1^2 + m_2^2}$. D_M ist der Diracoperator für freie Fermionen mit der Masse $m = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$ Allerdings ist die Masse ein Gemisch aus einem skalaren Anteil m_1 und einem pseudoskalaren Anteil m_2. Unser Variationsansatz unterscheidet wegen der ρ_3 - Invarianz nicht zwischen dem skalaren und pseudoskalaren Anteil. Für den Energieerwartungswert des Zustandes $|\vec{G}\rangle$ erhalten wir, wobei wir diesmal auch die Terme proportional zu Z^0W mitberücksichtigen.

$$\langle \vec{G}|H|\vec{G}\rangle = E(\vec{G}) = \Big\{ \sum_{\vec{k}} - \frac{2\vec{k}^2}{\omega} \Big\} - \frac{\delta W}{Z^3} \Big\{ \sum_{\vec{k}} \frac{m}{\omega} \Big\}^2 - \frac{4W}{Z^3} \sum_{\vec{k}} \frac{\vec{k}^2}{\omega^2}$$

$$\omega = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \qquad (I,96)$$

Dabei gilt für m mit (I,72) und (I,92) die Selbstkonsistenzbedingung:

$$m = \frac{\delta W}{Z^3} \sum_{\vec{k}} \frac{m}{\omega} \qquad (I,97)$$

Wenn die zusätzliche Bedingung

$$1 < \frac{8W}{Z^3} \sum_{\vec{h} \neq \vec{0}} \frac{1}{|\vec{K}|} \qquad \text{(I,98)}$$

erfüllt ist, ist (I,97) für Werte von m in der Größenordnung von $\sqrt{Z}$ lösbar. Wir können dann genauso wie beim Zustand $|\vec{F}>$ zeigen, daß (I,97) eine Minimumsbedingung ist und daß $E(\vec{G})$ immer sowohl unterhalb $-\sum_{\vec{h}} 2|\vec{K}|$ als auch unterhalb $-8WZ^3$ liegt. Mit den Zahlenwerten von Lagally schreiben wir (I,98) in der anschaulicheren Form:

$$-8W < -0{,}381 \cdot \frac{1}{Z^3} \sum_{\vec{h}} 2|\vec{K}| \qquad \text{(I,99)}^1$$

Die Selbstkonsistenzbedingung ist übrigens immer lösbar, wenn man nicht darauf besteht, daß m proportional zu $\sqrt{Z}$ sein soll, sondern in beliebiger Größenordnung von Z zugelassen ist. Die rechte Seite von (I,97) ist nämlich m = 0 nicht Null sondern $\frac{8W}{Z^3}$.[2] Graphisch dargestellt entspricht der Lösung von (I,97) der Schnittpunkt der beiden Kurven:

$$f_1(m) = m \;;\; f_2(m) = \frac{8W}{Z^3} + \frac{8W}{Z^3} \sum_{\vec{h} \neq 0} \frac{m}{\omega} \qquad \text{(I,100)}$$

Für $1 = \frac{8W}{Z^3} \sum_{\vec{h} \neq 0} \frac{1}{|\vec{K}|}$ ist m endlich.(prop.Z^0) Es ist leicht zu zeigen, daß (I,97) eine Minimumsbedingung ist und $E(\vec{G})$ immer unterhalb $-\frac{8W}{Z^3} - \sum_{\vec{h}} 2|\vec{K}|$ und $-8WZ^3$ liegt.

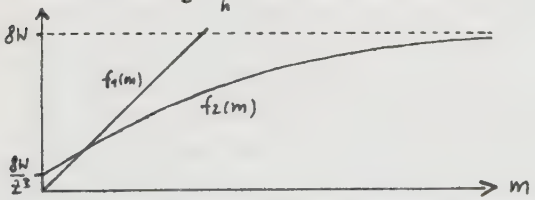
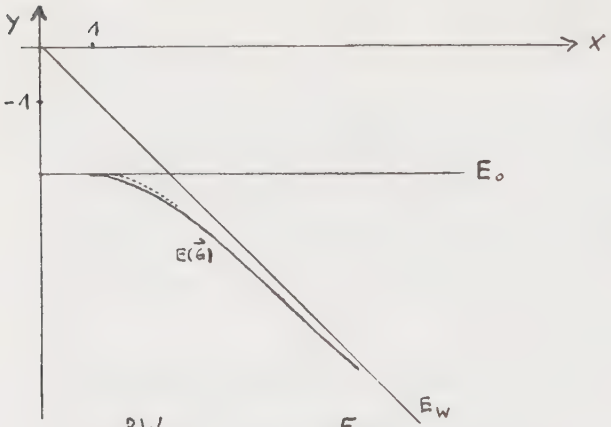


Fig. 1 Der prinzipielle Verlauf der Funktionen $f_1(m)$ und $f_2(m)$

1) gilt nur für $K_i = \frac{\pi}{l} \sin \frac{2\pi h_i}{Z}$ 2) G.Friedel: persönliche Mitteilung

Wir skizzieren noch in einem Diagramm die Abhängigkeit der Energie $E(\vec{G})$ von W.



$x = \frac{8W}{\sqrt{2}} \cdot l$; $y = \frac{E}{\sqrt{2}\hbar} \cdot l$;

E_0: Energie des Diracsees der masselosen Urfermionen

E_W: Grundzustandenergie von H_W^B

Fig. 2

Wenn wir in einem entsprechendem Diagramm für negative W, also mit $x = \frac{-8W}{\sqrt{2}} \cdot l$ und $y = \frac{E}{\sqrt{2}\hbar} \cdot l$, die Energie des Zustandes $|\vec{F}\rangle$ antragen, so liegt die Kurve für $E(\vec{F})$ etwas über der für $E(\vec{G})$ und verhält sich etwa so wie die gestrichelt eingezeichnete Kurve; in ihren physikalischen Eigenschaften unterscheiden sich die Zustände $|\vec{F}\rangle$ und $|\vec{G}\rangle$ aber wesentlich. Da wir aber nach (I,9) eine unitäre Transformtion besitzen, die W nach -W transformiert, den Hamiltonoperator aber sonst nicht ändert, gibt es also auch einen $|\vec{G}\rangle$ entsprechenden Zustand $|\vec{G}\rangle_1$ für negatives W und einen $|\vec{F}\rangle$ entsprechenden Zustand $|\vec{F}\rangle_1$ für positives W. Es gilt dabei natürlich, daß die Energien von $|\vec{F}\rangle$ und $|\vec{F}\rangle_1$ bzw. $|\vec{G}\rangle$ und $|\vec{G}\rangle_1$ gleich sind. Die Zustände $|\vec{F}\rangle_1$ und $|\vec{G}\rangle_1$ sind in unserer Variationsrechnung nicht aufgetaucht. Das liegt

daran, daß wir nur Zustände untersucht haben, die an jedem Punkt im $\vec{h}$-Raum zweifach besetzt sind. Wegen der Form der Transformation (I,9) sind $|\vec{F}\rangle_1$ und $|\vec{G}\rangle_1$ jedoch von wesentlich komplizierterer Form und zwar sind es Summen von Produktzuständen für die an jedem Punkt im $\vec{h}$-Raum alle möglichen Besetzungszahlen vorkommen.

II. Grundzustandsapproximationen für die A-Wechselwirkung

Vorbemerkung: Für das Folgende gilt, wofern es nicht ausdrücklich anders gesagt wird, $W > 0$ und Z geradzahlig. Die Rechnungen gehen von der β_3-Darstellung aus.

Der Zustand $|\vec{G}\rangle$, den wir als Grundzustandsapproximation für die B-Wechselwirkung erhalten haben, ist auch für die A-Wechselwirkung von Bedeutung, da er der Hartree-Fock Grundzustand für diese Wechselwirkung ist. Seine Energie in Abhängigkeit von W ist in Abbildung 3 aufgetragen. Der Verlauf dieser Kurve ist jedoch nicht so schön wie der der Kurve $E(\vec{G})$ [1] in Abbildung 2, da man in der A-Wechselwirkung nicht immer unterhalb der Grundzustandsenergie von H_W^A bleibt und als asymptotische Energie nur die halbe minimale Grundzustandsenergie von H_W^A erhält. Die Ursache dafür ist die dreifache Entartung des Grundzustandes von $W\{(\psi^+(\vec{n})\vec{\sigma}\psi(\vec{n}))^2-(\psi^+(\vec{n})\vec{\beta}\psi(\vec{n}))^2\}$, die für jeden der drei Zustände $\psi^+(\vec{n})\beta_i\beta_2\sigma_2\psi^+(\vec{n})|0\rangle$ die minimale Energie $-8W$ ergibt. Für $W\to\infty$ wird aus $|\vec{G}\rangle$ der Zustand (siehe (I,93))

$$|\vec{G}\rangle_\infty = \prod_{\vec{k}} \psi^+(\vec{k})\tfrac{1}{4}\vec{m}\vec{\beta}\beta_2\sigma_2\psi^+(\vec{k})|0\rangle$$
$$\vec{m}^T = \left(\frac{im_2}{\sqrt{m_1^2+m_2^2}}, \frac{-im_1}{\sqrt{m_1^2+m_2^2}}, 1\right) \qquad \text{(II,1)}$$

Wegen der Entartung der Zustände $\psi^+(\vec{n})\beta_i\beta_2\sigma_2\psi^+(\vec{n})|0\rangle$ für die B-Wechselwirkung gilt wegen (I,1)) :

$$_\infty\langle\vec{G}|H_W^B|\vec{G}\rangle_\infty = -8WZ^3 \qquad \text{(II,2)}$$

Bei der A-Wechselwirkung sind jedoch nur die beiden Zustände $\psi^+(\vec{n})\beta_1\beta_2\sigma_2\psi^+(\vec{n})|0\rangle$ und $\psi^+(\vec{n})\beta_2\beta_2\sigma_2\psi^+(\vec{n})|0\rangle$ entartet und führen

1) bei B-Wechselwirkung

zur minimalen Wechselwirkungsenergie $-4W$, der Zustand $\psi^+(\vec{n})\beta_3\beta_2\sigma_2\psi^+(\vec{n})|0\rangle$ dagegen hat die Energie 0. Da dieser Zustand bei jeder beliebigen Wahl von m_1 und m_2 in $|\vec{G}\rangle_\infty$ das gleiche Gewicht hat wie die beiden entarteten Zustände ergibt sich für die A-Wechselwirkung:

$$\infty\langle\vec{G}|H_W^A|\vec{G}\rangle_\infty = -2WZ^3 \qquad \text{(II,3)}$$

Wenn der β Term in H_W^A statt $-W\sum_{\vec{n}}\psi^+(\vec{n})\beta_3\psi(\vec{n})\psi^+(\vec{n})\beta_3\psi(\vec{n})$ die Form $-W\sum_{\vec{n}}\psi^+(\vec{n})\beta_i\psi(\vec{n})\psi^+(\vec{n})\beta_i\psi(\vec{n})$ $\quad i = 1,2$ hätte, wären ähnliche Bedingungen wie bei der B-Wechselwirkung und es würde $\infty\langle\vec{G}|H_W^A|\vec{G}\rangle_\infty = -4WZ^3$ gelten. Es wird sich herausstellen, daß man H_W^A auf eine solche Form unitär transformieren kann.

Der Hamiltonoperator hat bei A-Wechselwirkung die Form:

$$H = -\frac{i\sqrt{2}}{2l}\sum_{\vec{n}}\psi^+(\vec{n})\sum_i\beta_3\sigma_i\left(\psi(\vec{n}+\vec{e}_i)-\psi(\vec{n}-\vec{e}_i)\right) +$$

$$+W\sum_{\vec{n}}\left\{\psi^+(\vec{n})\vec{\sigma}\psi(\vec{n})\psi^+(\vec{n})\vec{\sigma}\psi(\vec{n})-\psi^+(\vec{n})\beta_3\psi(\vec{n})\psi^+(\vec{n})\beta_3\psi(\vec{n})\right\} \qquad \text{(II,4)}$$

Der Wechselwirkungsanteil H_W^A hat die folgende Normaldarstellung:

$$H_W^A = \frac{W}{2}\sum_{\vec{n}}\sum_l\{\psi^+(\vec{n})\vec{\sigma}\sigma_2\beta_2\psi^\#(\vec{n})\psi^T(\vec{n})\beta_2\sigma_2\vec{\sigma}\psi(\vec{n}) - 2\psi^+(\vec{n})\sigma_2\vec{\beta}\beta_2\psi^+(\vec{n})\psi^T(\vec{n})\beta_2\vec{\beta}\sigma_2\psi(\vec{n})$$

$$+\psi^+(\vec{n})\sigma_2\beta_3\beta_2\psi^\#(\vec{n})\psi^T(\vec{n})\beta_2\beta_3\sigma_2\psi(\vec{n})\} + 2W\sum_{\vec{n}}\psi^+(\vec{n})\psi(\vec{n}) \qquad \text{(II,5)}$$

Für geradzahliges Z ist H_{Bew} gegenüber der SU(4) gruppe, deren infinitesimale Operatoren in (I,21) angegeben sind, invariant, Mit Hilfe der Operatoren $\bar{R}_1$ und $\bar{R}_2$ von (I,21) erzeugen wir zwei endliche Drehungen um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ mit β_1 bzw. β_2 als Drehachse. Dem entsprechen die beiden folgenden unitären Transformationen:

$$\psi(\vec{n}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+i\beta_1 e^{i\pi\vec{n}\vec{\alpha}}\right)\psi_{(I)}(\vec{n}) \quad ; \quad \vec{\alpha}^T = (1,1,1) \qquad \text{(II,6)}$$

und $\psi(\vec{n}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + i\beta_2 e^{i\pi \vec{n}\vec{\alpha}}) \psi_{(II)}(\vec{n})$ (II,6a)

Diese Transformationen lassen neben dem Bewegungsoperator auch noch den $\vec{\sigma} \times \vec{\sigma}$ Anteil des Wechselwirkungsoperators invariant. Sie ändern jedoch den β_3 Term von H_W^A, so daß der Wechselwirkungsoperator nach Ausführung der Transformation (II,6) bzw. (II,6a) folgendermaßen aussieht:

$$H_W^{A(I)} = W \Big(\sum_{\vec{n}} \psi^+_{(I)}(\vec{n}) \vec{\sigma} \psi_{(I)}(\vec{n}) \psi^+_{(I)}(\vec{n}) \vec{\sigma} \psi_{(I)}(\vec{n}) - \psi^+_{(I)}(\vec{n}) \beta_2 \psi_{(I)}(\vec{n}) \psi^+_{(I)}(\vec{n}) \beta_2 \psi_{(I)}(\vec{n}) \Big) \quad (II,7)$$

bzw.

$$H_W^{A(II)} = W \Big(\sum_{\vec{n}} \psi^+_{(II)}(\vec{n}) \vec{\sigma} \psi_{(II)}(\vec{n}) \psi^+_{(II)}(\vec{n}) \vec{\sigma} \psi_{(II)}(\vec{n}) - \psi^+_{(II)}(\vec{n}) \beta_1 \psi_{(II)}(\vec{n}) \psi^+_{(II)}(\vec{n}) \beta_1 \psi_{(II)}(\vec{n}) \Big) \quad (II,8)$$

Die Normaldarstellungen für $H_W^{A}(I)$ und $H_W^{A}(II)$ lauten:

$$H_W^{A(I)} = \frac{W}{2} \Big\{ \sum_{\vec{n},i} \psi^+_{(I)}(\vec{n}) A_i^+ \psi^{\#}_{(I)}(\vec{n}) \psi^T_{(I)}(\vec{n}) A_i \psi_{(I)}(\vec{n}) - 2\psi^+_{(I)}(\vec{n}) B_i^+ \psi^{\#}_{(I)}(\vec{n}) \psi^T_{(I)}(\vec{n}) B_i \psi_{(I)}(\vec{n}) +$$
$$+ \psi^+_{(I)}(\vec{n}) C^+ \psi^{\#}_{(I)}(\vec{n}) \psi^T_{(I)}(\vec{n}) C \psi_{(I)}(\vec{n}) \Big\} + 2W \sum_{\vec{n}} \psi^+_{(I)}(\vec{n}) \psi_{(I)}(\vec{n}) \quad ;$$

$$H_W^{A(II)} = \frac{W}{2} \Big\{ \sum_{\vec{n},i} \psi^+_{(II)}(\vec{n}) A_i^+ \psi^{\#}_{(II)}(\vec{n}) \psi^T_{(II)}(\vec{n}) A_i \psi_{(II)}(\vec{n}) - 2\psi^+_{(II)} B_i^+ \psi^{\#}_{(I)}(\vec{n}) \psi^T_{(I)}(\vec{n}) B_i \psi_{(II)}(\vec{n}) +$$
$$+ \psi^+_{(II)}(\vec{n}) D^+ \psi^{\#}_{(I)}(\vec{n}) \psi^T_{(II)}(\vec{n}) D \psi_{(II)}(\vec{n}) \Big\} + 2W \sum_{\vec{n}} \psi^+_{(II)} \psi_{(II)}(\vec{n}) \quad (II,9)$$

Dabei ist: $A_i = \beta_2 \sigma_2 \sigma_i$; $B_i = \beta_2 \beta_i \sigma_2$; $C = \beta_2 \beta_2 \sigma_2$;
$D = \beta_2 \beta_1 \sigma_2$;

Wir untersuchen zunächst den Fall (II). Wie bei der Rechnung mit H_W^B suchen wir das Minimum von $\langle \varphi | H_{Bew} + H_W^{A(II)} | \varphi \rangle$. $|\varphi\rangle$ ist wieder ein Produktzustand im Impulsraum.

$$|\varphi\rangle = \prod_{\vec{k}} \varphi^{+}_{(\mathrm{II})}(\vec{k}) \left(\vec{f}(\vec{k}) \vec{\sigma} \sigma_2 \beta_2 + g(\vec{k}) \beta \beta_2 \sigma_2 \right) \varphi^{\#}_{(\mathrm{II})}(\vec{k}) \, |0\rangle$$

$$\vec{f}^{*}(\vec{k}) \vec{f}(\vec{k}) + \vec{g}^{*}(\vec{k}) \vec{g}(\vec{k}) = \frac{1}{8} \; ; \qquad \text{(II,10)}$$

Zuvor geben wir noch eine Rechenregel an:

Sei $|\pi\rangle = \prod_{\vec{k}} \varphi^{+}(\vec{k}) F(\vec{k}) \varphi^{*}(\vec{k}) \, |0\rangle$ und

$$\Gamma = \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4} \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4) \, \varphi^{+}(\vec{k}_1) G^{+} \varphi^{*}(\vec{k}_2) \varphi^{T}(\vec{k}_3) G \varphi(\vec{k}_4)$$

dann gilt: $\langle \pi | \Gamma | \pi \rangle =$

$$32 \cdot \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2 (\vec{k}_1 \neq \vec{k}_2)} Sp\left(F^{+}(\vec{k}_2) G^{+} F^{+}(\vec{k}_1) F(\vec{k}_1) G F(\vec{k}_2) \right)$$

$$+ 4 \sum_{\vec{k}} Sp\left(G F(\vec{k}) \right) Sp\left(G^{+} F^{+}(\vec{k}) \right) \qquad \text{(II,11)}$$

Damit erhalten wir: $\langle \varphi | H_{\mathrm{Bew}} + H_{W}^{A(\mathrm{II})} | \varphi \rangle =$

$$= 16 \sum_{\vec{k}} \left(\vec{f}(\vec{k}) \vec{K} g_3^{*}(\vec{k}) + \vec{f}^{*}(\vec{k}) \vec{K} g_3(\vec{k}) \right) + \frac{16W}{Z^3} \Big\{ \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2 (\vec{k}_1 \neq \vec{k}_2)} 24 \left(\vec{f}^{*}(\vec{k}_1) \times \vec{f}(\vec{k}_1) \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\vec{f}(\vec{k}_2) \times \vec{f}^{*}(\vec{k}_2) \right) + 8 \cdot \sum_{m} \left(f_m^{*}(\vec{k}_1) g_1(\vec{k}_1) + f_m(\vec{k}_1) g_1^{*}(\vec{k}_1) \right) \cdot \left(f_m^{*}(\vec{k}_2) \cdot g_1(\vec{k}_2) + \right.$$

$$\left. + f_m(\vec{k}_2) g_1^{*}(\vec{k}_2) \right) - 16 \left(\vec{g}^{*}(\vec{k}_1) \times \vec{g}(\vec{k}_1) \right) \cdot \left(\vec{g}(\vec{k}_2) \times \vec{g}^{*}(\vec{k}_2) \right) - 8 \cdot \left(\vec{g}^{*}(\vec{k}_1) \times \vec{g}(\vec{k}_1) \right)_1 \cdot$$

$$\cdot \left(\vec{g}(\vec{k}_2) \times \vec{g}^{*}(\vec{k}_2) \right)_1 \Big\} + \frac{32W}{Z^3} \sum_{\vec{k}} \left(g_1(\vec{k}) g_1^{*}(\vec{k}) - 3 \vec{g}(\vec{k}) \vec{g}^{*}(\vec{k}) \right) +$$

$$+ 2WZ^3 + 6W \qquad \text{(II,12)}$$

Die Variationsrechnung ergibt die minimale Energie für den Zustand:

$$|\varphi\rangle_{(II)} = \prod_{\vec{h}} \frac{1}{4} \varphi^{+}(\vec{h}) \left(\frac{i\rho_2 \vec{k}\vec{\sigma}\sigma_2}{\sqrt{\vec{k}^2+m^2}} - \rho_1\sigma_2 - \frac{m\sigma_2}{\sqrt{\vec{k}^2+m^2}} \right) \varphi^{+}(\vec{h}) |0\rangle \qquad (II,13)$$

Dieser Zustand hat bis auf einen Phasenfaktor die gleiche Form wie $|\vec{G}\rangle$, wenn wir $m_2 = 0$ wählen. Für den Zustand (II,13) gilt:

$$\vec{f}(\vec{h}) = \frac{i\vec{k}}{4\sqrt{\vec{k}^2+m^2}} \quad ; \quad g_1(\vec{h}) = 0 \quad ; \quad g_2(\vec{h}) = -\frac{m}{4\sqrt{\vec{k}^2+m^2}}$$
$$g_3(\vec{h}) = -\frac{i}{4} \qquad (II,14)$$

Damit erhalten wir aus $(II,12)_{(II)} \langle\varphi| H_{Sew} + H_W^{A(II)} |\varphi\rangle_{(II)} =$

$$= E(m) = \sum_{\vec{h}} -\frac{2k^2}{\sqrt{\vec{k}^2+m^2}} - \frac{6W}{z^3} \left(\sum_{\vec{h}} \frac{m}{\sqrt{\vec{k}^2+m^2}} \right)^2 + 2Wz^3 \qquad (II,15)$$

Wenn wir den Punkt $\vec{h} = \vec{0}$ mit $g_1(\vec{h}) = 0$, $g_2(\vec{h}) = -\frac{1}{4}$, $g_3(\vec{h}) = -\frac{i}{4}$ besetzen, lautet die Formel für die Energie etwas genauer:

$$E(m) = \sum_{\vec{h}} \frac{-2\vec{k}^2}{\sqrt{\vec{k}^2+m^2}} - \frac{6W}{z^3} \left(1 + \sum_{\vec{h}\neq\vec{0}} \frac{m}{\sqrt{\vec{k}^2+m^2}} \right)^2 + 2Wz^3 \qquad (II,16)$$

(II,16) stimmt mit (II,15) überein, wenn wir in (II,15) $E(0) = \lim_{m\to 0} E(m)$ definieren. Die Funktion E(m) hat ein Minimum, wenn m der folgenden Gleichung genügt:

$$m = \frac{6W}{z^3} + \frac{6W}{z^3} \sum_{\vec{h}\neq\vec{0}} \frac{m}{\sqrt{\vec{k}^2+m^2}} \qquad (II,17)$$

Ein Minimum liegt vor, da $\frac{d^2}{dm^2} E(m) = \sum_{\vec{h}} \left(\frac{1}{\sqrt{\vec{k}^2+m^2}} - \frac{m^2}{\sqrt{\vec{k}^2+m^2}^3} \right) > 0$ ist. Für (II,17) gilt das Gleiche wie für (I,97). (II,17) ist für alle Werte von W lösbar, die Lösung ist eindeutig. Einen end-

lichen Wert für m erhält man, wenn $\frac{6W}{z^3}\sum_{\vec{k}\neq 0}\frac{1}{|\vec{k}|}=1$ ist. Die durch (II,17) bestimmte minimale Energie nennen wir E_1. Wegen $E(0)=-2\sum_{\vec{k}}|\vec{k}|-\frac{6W}{z^3}+2Wz^3$ und $E(\infty)=-4WZ^3$ liegt E_1 sowohl unterhalb der Energie des Diracsees der masselosen Fermionen als auch unterhalb der minimalen Wechselwirkungsenergie $-4WZ^3$. E_1 hängt noch von W ab. Wir untersuchen zunächst $E_1(W)$ für große W. In diesem Fall können wir die Gleichung (II,17) bis zur ersten Ordnung von $\frac{1}{W}$ lösen. Man erhält:

$$m = 6W - \frac{1}{12W}\cdot\frac{1}{z^3}\sum_{\vec{k}}\vec{k}^2 + O\left(\frac{1}{W^2}\right) \qquad \text{(II,18)}$$

Den Ausdruck für $E_1(W)$ können wir unter Verwendung von (II,17) folgendermaßen umformen:

$$E_1(m)=\sum_{\vec{k}}-2\sqrt{\vec{k}^2+m^2}+2\sum_{\vec{k}}\frac{m^2}{\sqrt{\vec{k}^2+m^2}}+2Wz^3-z^3\cdot\frac{m^2}{6W} \qquad \text{(II,19)}^{1}$$

Mit (II,18) ergibt sich folgendes Verhalten für große W:

$$E_1(W)=-4WZ^3-\frac{1}{6W}\sum_{\vec{k}}\vec{k}^2+O\left(\frac{1}{W^2}\right)\cdot z^3 \qquad \text{(II,20)}$$

Wir schreiben für W: $W = W_0\cdot\frac{\sqrt{z}}{l}$ und erhalten für $E_1(W)$:

$$E_1(W_0)=\frac{\sqrt{z}^7}{l}\left(-4W_0-\frac{1}{6W_0}\cdot\frac{1}{z^3}\sum_{\vec{k},i}\sin^2\frac{2\pi k_i}{z}+O\left(\frac{1}{W_0^2}\right)\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{z}^7}{l}\left(-4W_0-\frac{1}{4W_0}+O\left(\frac{1}{W_0^2}\right)\right) \qquad \text{(II,21)}$$

(vergl.: F. Bopp und H. Maier-Bötzel Grundzustand und globale Anregungen einer Spinorfeldtheorie vom Heisenbergtyp im Gitterraum mittels umgekehrter Störungsrechnung. München 1970)[2]

1) siehe Anhang B6

2) siehe l.c. VI

Für W = 0 wird $E_1(0) = -2\sum_{\vec{k}} |\vec{k}| = -2{,}3876\ \frac{\sqrt{Z}^7}{\iota} = D_0$. Solange

$$W \leq \frac{1}{6 \cdot \frac{1}{Z^3} \sum_{\vec{k} \neq 0} \frac{1}{|\vec{k}|}} \qquad \text{(II,22)}$$

ist, ist m unendlich klein bzw. endlich ($\sim Z^{-\alpha}$ $\alpha \geq 0$), so daß man keine Absenkung $\sim \frac{\sqrt{Z}^7}{\iota}$ unter D_0 erhält. Erst wenn gilt:

$$W > \left(\frac{6}{Z^3} \sum_{\vec{k} \neq 0} \frac{1}{|\vec{k}|} \right)^{-1} \qquad \text{(II,23)}$$

tritt eine merkliche Absenkung der Energie auf. Mit den Zahlen von Lagally erhalten wir für (II,23): $W_0 > 0{,}183$ (II,24)

Im Vergleich dazu liefert die alte Hartree-Fock-Rechnung eine Absenkung $\sim \frac{\sqrt{Z}^7}{\iota}$ unter D_0 erst für $W_0 > 0{,}274$. Die Ableitung von $E_1(W)$ nach W ist:

$$\frac{dE_1(W)}{dW} = -\frac{6}{Z^3} \left(\sum_{\vec{k}} \frac{m}{\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}} \right)^2 + 2Z^3 = -\frac{m^2}{6W^2} Z^3 + 2Z^3 \qquad \text{(II,25)}$$

Für $W_0 \leq 0{,}183$ ist der erste Term um Größenordnungen von $\sqrt{Z}$ kleiner als der zweite, in diesem Bereich ist also $\frac{dE_1(W)}{dW} = 2Z^3 + Z^b$ ($b \leq 2$). $E_1(W)$ hat ein Maximum, wenn gilt:

$$\frac{m^2}{6W^2} \cdot Z^3 = 2Z^3 \qquad \text{(II,26)}$$

An der Stelle des Maximums ist damit $m = \sqrt{12}\, W$. Mit (II,17) und der Kurve für die Funktion $G_0(m') = \frac{1}{Z^3} \sum_{\vec{k}} m' \left(\sqrt{m'^2 + \sum_i \sin^2 \frac{2\pi k_i}{Z}} \right)^{-1}$, die wir von Lagally übernehmen, bestimmen wir graphisch: $m = 0{,}82\ \frac{\sqrt{Z}}{\iota}$

$$m = 0{,}82\ \frac{\sqrt{Z}}{\iota} \qquad \text{(II,27)}$$

Für W erhalten wir entsprechend: $W = 0{,}236\ \frac{\sqrt{Z}}{\iota}$ (II,27a)

Die Funktion $E_1(W)$ ist in Abbildung 3 dargestellt. Man kann $E_1(W)$ mit Hilfe von $G_0(m')$ berechnen, wobei man die Summe $-2\sum_{\vec{k}} \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ durch Integration der Kurve $G_0(m')$ erhält. Die Kurve für die Hartree-Fock-Energie haben wir von F. Bopp und H. Maier-Bötzel übernommen.

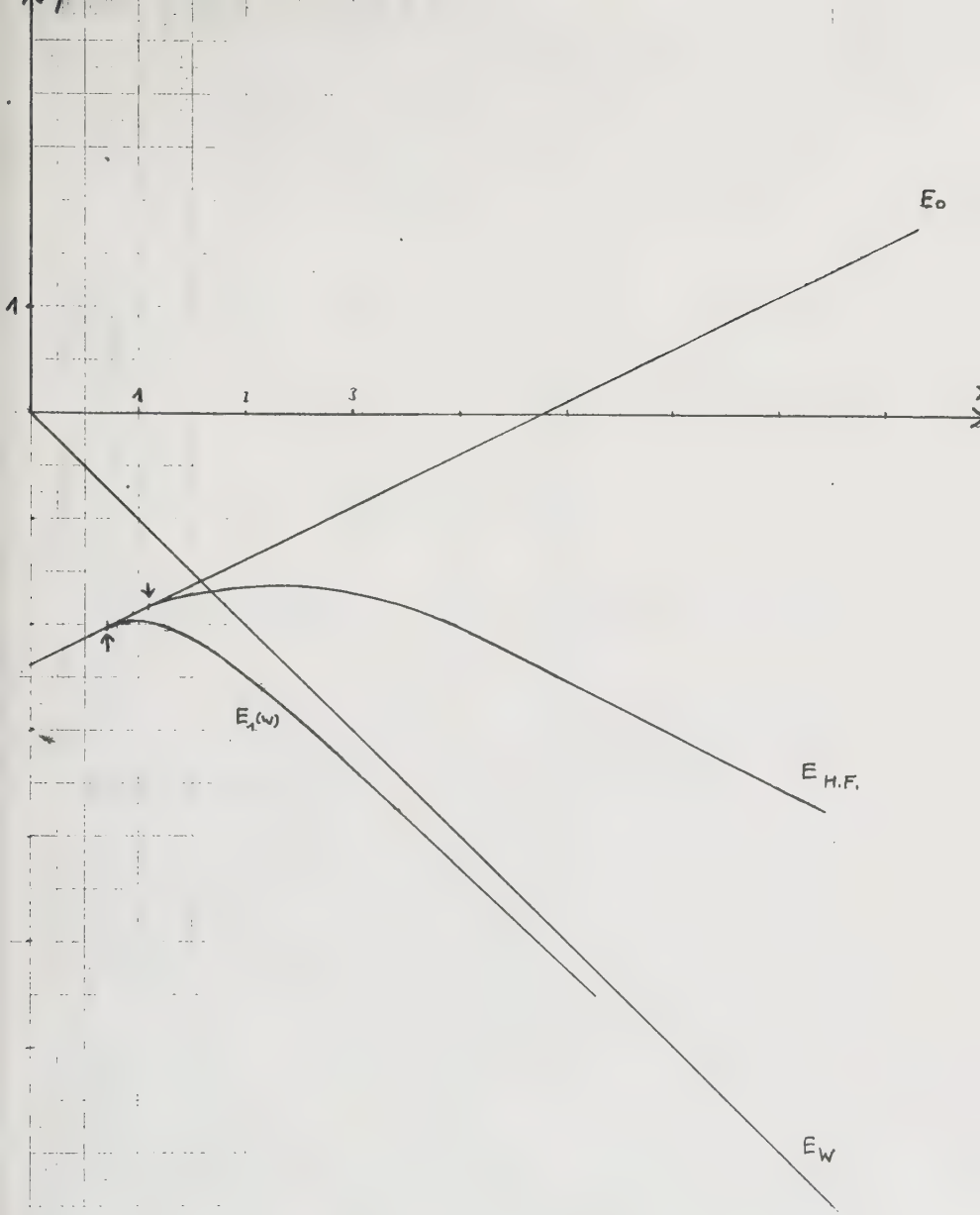


Abb. 3 $\quad x = \frac{4W}{\sqrt{Z}} \cdot l = 4W_0 \quad ; \quad y = \frac{E}{\sqrt{Z}^7} \cdot l$

$E_0 = -2 \sum_{\vec{k}} |\vec{k}| + 2WZ^3 \quad ; \quad E_W = -4WZ^3$

$E_{H.F}$: Energie des Hartree-Fock Zustandes

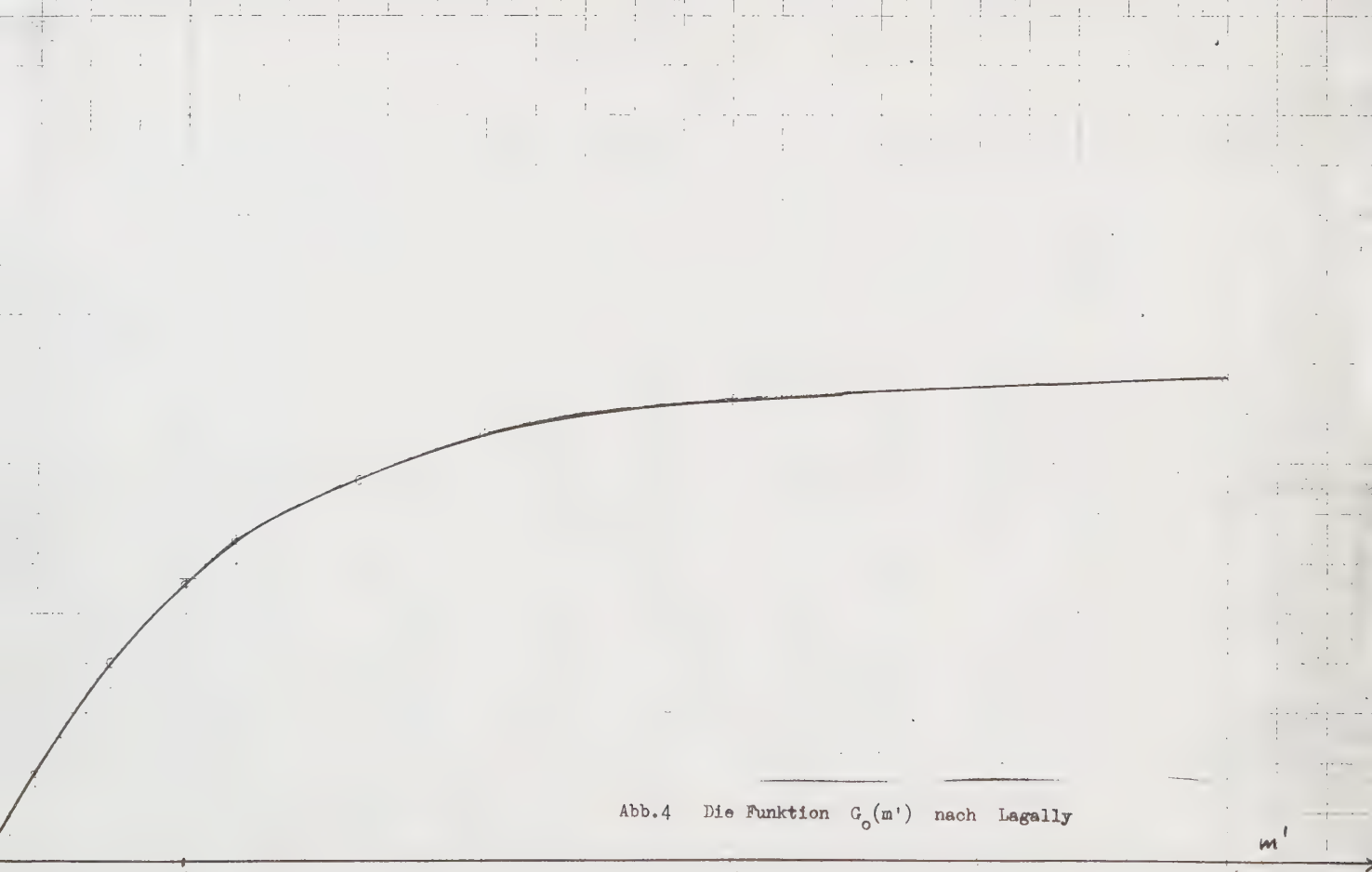


Abb.4 Die Funktion $G_o(m')$ nach Lagally

Wir wollen noch kurz den Fall (I) diskutieren. Dazu setzen wir wieder einen Produktzustand gemäß (II,10) für $|\varphi\rangle$ an und suchen das Maximum von $\langle\varphi|H_{Gew}+H_W^{(II)}|\varphi\rangle$. Für den Energieerwartungswert gilt wieder (II,12), wenn wir den Term

$$-8\,(\vec{g}^{\,*}(\vec{k}_1)\times\vec{g}\,(\vec{k}_1))_1\cdot(\vec{g}\,(\vec{k}_2)\times\vec{g}^{\,*}(\vec{k}_2))_1 +$$

$$+8\sum_m\left\{(f_m^*(\vec{k}_1)\,g_1(\vec{k}_1)+f_m(\vec{k}_1)\,g_1^*(\vec{k}_1))(f_m^*(\vec{k}_2)\,g_1(\vec{k}_2)+f_m(\vec{k}_2)\,g_1^*(\vec{k}_2))\right\}$$

in (II,12) durch

$$-8\,(\vec{g}^{\,*}(\vec{k}_1)\times\vec{g}\,(\vec{k}_1))_2\cdot(\vec{g}\,(\vec{k}_2)\times\vec{g}^{\,*}(\vec{k}_2))_2 +$$

$$+8\sum_m\left\{(f_m^*(\vec{k}_1)\,g_2(\vec{k}_1)+f_m(\vec{k}_1)\,g_2^*(\vec{k}_1))(f_m^*(\vec{k}_2)\,g_2(\vec{k}_2)+f_m(\vec{k}_2)\,g_2^*(\vec{k}_2))\right\}$$

ersetzen. Die minimale Energie erhalten wir für den Zustand:

$$|\varphi\rangle_{(I)}=\prod_{\vec{k}}\frac{1}{4}\,\varphi^+_{(I)}(\vec{k})\left(\frac{i\beta_2\vec{k}\vec{\sigma}\sigma_2}{\sqrt{\vec{k}^2+m^2}}-\beta_1\sigma_2+i\frac{m\beta_3\sigma_2}{\sqrt{\vec{k}^2+m^2}}\right)\varphi^{+}_{(I)}(\vec{k})|0\rangle \qquad \text{(II,28)}$$

$|\varphi\rangle_{(I)}$ ist bis auf einen Phasenfaktor identisch mit dem Zustand $|\vec{G}\rangle$ von (I,93) bei dem $m_1 = 0$ ist. Die Rechnung zeigt, daß $|\varphi\rangle_{(I)}$ in Bezug auf die Energie die gleichen Eigenschaften hat wie $|\varphi\rangle_{(II)}$, insbesondere wird auch die Bestimmungsgleichung für m dieselbe. Die Zustände $|\varphi\rangle_{(II)}$ und $|\varphi\rangle_{(I)}$ haben in der (II) bzw. (I) Darstellung eine einfache physikalische Bedeutung, da sie Grundzustände von Diracoperatoren mit skalarer bzw. pseudoskalarer Masse sind.

$$\sum_{\vec{k}}\left\{\varphi^+_{(II)}(\vec{k})\,\beta_3\vec{k}\vec{\sigma}\,\varphi_{(II)}(\vec{k})-m\varphi^+_{(II)}(\vec{k})\,\beta_1\varphi_{(II)}(\vec{k})\right\}\cdot|\varphi\rangle_{(II)}=-2\left(\sum_{\vec{k}}\sqrt{\vec{k}^2+m^2}\right)|\varphi\rangle_{(II)} \qquad \text{(II,29)}$$

$$\sum_{\vec{k}}\left\{\varphi^+_{(I)}(\vec{k})\,\beta_3\vec{k}\vec{\sigma}\,\varphi_{(I)}(\vec{k})+m\varphi^+_{(I)}(\vec{k})\,\beta_2\varphi_{(I)}(\vec{k})\right\}|\varphi\rangle_{(I)}=-2\left(\sum_{\vec{k}}\sqrt{\vec{k}^2+m^2}\right)|\varphi\rangle_{(I)} \qquad \text{(II,30)}$$

Wir gehen nun zurück in die ursprüngliche β_3 Darstellung. Das geschieht im Fall (II) mit der inversen der Transformation (II,6a), die wir vorteilhafter im Impulsraum anschreiben.

$$\psi_{(II)}(\vec{h}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi(\vec{h}) - \frac{i}{\sqrt{2}}\beta_2\psi(\vec{h}-\vec{v}_i) \qquad \vec{v}_i \text{ wie üblich.} \qquad (II,31)$$

Vermittels (II,31) können wir $|\varphi\rangle_{(II)}$ in der β_3-Darstellung angeben.

$$|\varphi\rangle_{(II)}^{\beta_3} = \prod_{\vec{h}} \Big\{ \frac{1}{8}\big(\psi^+(\vec{h}) + i\psi^+(\vec{h}-\vec{v}_i)\beta_2\big)\cdot\Big(\frac{i\beta_2\vec{k}\vec{\sigma}\sigma_2}{\sqrt{\vec{k}^2+m^2}} - \beta_1\sigma_2 - \frac{m\sigma_2}{\sqrt{\vec{k}^2+m^2}}\Big)\cdot$$

$$\cdot\big(\psi^+(\vec{h}) - i\beta_2\psi^+(\vec{h}-\vec{v}_i)\big)\Big\}\,|0\rangle \qquad (II,32)$$

(II,32) zeigt, daß $|\varphi\rangle_{(II)}^{\beta_3}$ von komplizierterer Gestalt ist als ein Produktzustand des Typs (II,10), da man Korrelationen zwischen "Antipodenpunkten" im $\vec{h}$-Raum hat. Ein weiterer Unterschied ist, daß für einen Zustand (II,10) $\psi^+(\vec{h})\psi(\vec{h})$ für jedes $\vec{h}$ den Erwartungswert 2 hat, während bei $|\varphi\rangle_{(II)}^{\beta_3}$ alle Werte möglich sind. Immerhin ist aber auch in der β_3 Darstellung eine einfache physikalische Interpretation möglich, wenn man (II,29) in die β_3- Darstellung transformiert. Man erhält dann die folgende Eigenwertgleichung:

$$\sum_{\vec{h}}\big\{\psi^+(\vec{h})\beta_3\vec{h}\vec{\sigma}\psi(\vec{h}) - m\psi^+(\vec{h}-\vec{v}_i)\beta_3\psi(\vec{h})\big\}\cdot|\varphi\rangle_{(II)}^{\beta_3} =$$

$$= \Big(-2\sum_{\vec{h}}\sqrt{\vec{k}^2+m^2}\Big)\,|\varphi\rangle_{(II)}^{\beta_3} \qquad (II,33)$$

Wir können der Gleichung (II,33) eine noch anschaulichere Form geben, wenn wir die folgenden achtkomponentigen Felder einführen:

$$\chi(\vec{h}) = \begin{pmatrix}\psi(\vec{h})\\ \psi(\vec{h}-\vec{v}_i)\end{pmatrix} \qquad (II,34)$$

Mit Hilfe von (II,34) erhalten wir nun für (II,33) :

$$\frac{1}{2}\sum_{\vec{h}}\left\{\chi^{+}(\vec{h})\,\lambda_3\beta_3\vec{h}\vec{\sigma}\,\chi(\vec{h}) - m\,\chi^{+}(\vec{h})\lambda_1\beta_3\chi(\vec{h})\right\}|\varphi\rangle^{\beta_3}_{(II)} =$$

$$= \left(-2\sum_{\vec{h}}\sqrt{\vec{h}^2+m^2}\;\right)|\varphi\rangle^{\beta_3}_{(II)} \qquad ;\quad \lambda_i = \sigma_i \times 1 \times 1 \qquad \text{(II,35)}$$

(II,35) stellt nun eine übliche Diracgleichung für Fermionen mit "skalarer" Masse dar. Wir geben noch die Vertauschungsrelationen für die $\chi(\vec{h})$Felder an.

$$\left\{\chi_i(\vec{h}),\,\chi_\kappa(\vec{h}')\right\}_+ = 0 \qquad ;\quad \left\{\chi^{+}_i(\vec{h}),\,\chi^{+}_\kappa(\vec{h}')\right\}_+ = 0 \qquad ;$$

$$\left\{\chi^{+}_i(\vec{h}),\,\chi_\kappa(\vec{h}')\right\}_+ = \delta(\vec{h},\vec{h}')\cdot\delta_{i\kappa} + \delta(\vec{h},\vec{h}'-\vec{v}_i)\cdot(\lambda_1)_{i\kappa} \qquad \text{(II,36)}$$

Der Grund für das Auftauchen des λ_1 Terms in der Vertauschungsrelation für $\chi^{+}(\vec{h})$und$\chi(\vec{h}')$liegt darin, daß die Felder $\chi(\vec{h})$ und$\chi(\vec{h}-\vec{v}_i)$ nicht unabhängig sind. Es gilt nämlich: $\lambda_1\cdot\chi(\vec{h}) = \chi(\vec{h}-\vec{v}_i)$. Der Faktor 1/2 vor dem Diracoperator (II,35) stammt ebenfalls von dieser Doppelzählung. Man kann diese Doppelzählung dadurch vermeiden, daß man die Stellen $\vec{h}$ auf denen die Felder$\chi(\vec{h})$definiert sind, so auf einen Unterraum V_h einschränkt, daß gilt:
1. Für jedes $\vec{h}$ ist entweder $\vec{h}$ oder $\vec{h}$ - $\vec{v}_i$ aus V_h.
2. Wenn $\vec{h}$ in V_h ist, ist $\vec{h}$ - $\vec{v}_i$ nicht aus V_h. Die Diracgleichung (II,35) hat die interessante Eigenschaft, daß sie mit den γ_5 Transformationen (in der β_3 Darstellung β_3 - Transformationen) vertauscht. Diese Eigenschaft ist wesentlich, denn wir werden noch zeigen, daß man, um auch bei großem N_o noch unter die Energie $-4WZ^3$ zu kommen, Zustände mit der Helizität [1] Null braucht. Ein Zustand, bei dem alle Helizitäten mit gleichem Gewicht gemischt werden, ist deshalb für das Grundzustandsproblem ungünstiger als Zustände mit der Helizität~~en~~ bei Null. Wegen der β_3- Invarianz des Diracoperators (II,35) ist es also naheliegend, daß $|\varphi\rangle^{\beta_3}_{(II)}$ eine scharfe Helizität hat. Dies ist tatsächlich der Fall, denn wir erhalten nach etwas Rechnung:

$$\sum_{\vec{h}}\chi^{+}(\vec{h})\,\beta_3\,\chi(\vec{h})\,|\varphi\rangle^{\beta_3}_{(II)} = 0 \qquad \text{(II,37)}$$

1) Wegen der Verwendung des Begriffes Helizität hier und im weiteren siehe Fußnote [1]) auf Seite 97 .

Wenn wir noch $|\varphi\rangle_{(I)}$ in die β_3-Darstellung transformieren, ergibt sich nichts wesentlich Neues. $|\varphi\rangle^{\beta_3}_{(I)}$ genügt ebenfalls der Diracgleichung (II,35), allerdings erhält der Massenterm ein negatives Vorzeichen.

Wir wenden uns nun dem Problem einer Grundzustandsapproximation für negatives W zu. Dazu wenden wir wieder das Verfahren an, daß wir den Testzustand festhalten und statt dessen H^A_W unitär variieren. Die günstigste Form erhält H^A_W nach Ausführung der folgenden unitären Transformation:

$$\psi(\vec{n}) = \frac{1}{2}\left(1 - \beta_3\sigma_3\, e^{i\pi(\vec{\gamma}+\vec{\beta})\vec{n}} + \beta_1\sigma_1\, e^{i\pi\vec{\gamma}\vec{n}} - \beta_2\sigma_2\, e^{i\pi\vec{\beta}\vec{n}}\right)\psi_{(III)}(\vec{n})$$

$$\vec{\gamma}^T = (1,0,0) \quad ; \quad \vec{\beta}^T = (0,1,0) \; ; \qquad \text{(II,38)}$$

Diese Transformation ist identisch mit der Transformation (I,9). Sie läßt den Bewegungsoperator invariant, vertauscht aber im Wechselwirkungsoperator die β und σ Matrizen, so daß dann H^A_W in der Stromdarstellung von der Form $\vec{\beta}\times\vec{\beta} - \sigma_3\times\sigma_3$ ist. Die Normaldarstellung von H^A_W erhält durch (II,38) die Form:

$$H^{A\,(III)}_W = \frac{W}{2\cdot z^3}\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3,\vec{k}_4}\delta(\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{k}_3-\vec{k}_4)\cdot\Big\{\psi^+_{(II)}(\vec{k}_1)\sigma_2\vec{\beta}\beta_2\psi^{\#}_{(II)}(\vec{k}_2)\psi^T_{(III)}(\vec{k}_3)\beta_2\vec{\sigma}\sigma_2\psi_{(III)}(\vec{k}_4) -$$

$$- 2\cdot\psi^+_{(III)}(\vec{k}_1)\vec{\sigma}\sigma_2\beta_2\psi^{\#}_{(III)}(\vec{k}_2)\psi^T_{(III)}(\vec{k}_3)\beta_2\sigma_2\vec{\sigma}\psi_{(III)}(\vec{k}_4) + \psi^+_{(III)}(\vec{k}_1)\beta_2\sigma_1\psi^{\#}_{(IV)}(\vec{k}_2)\psi^T_{(IV)}(\vec{k}_3)\beta_2\sigma_1\psi_{(III)}(\vec{k}_4)\Big\} +$$

$$+ 2W\sum_{\vec{k}}\psi^+_{(III)}(\vec{k})\psi_{(III)}(\vec{k}) \qquad \text{(II,39)}$$

Wir setzen nun wieder einen Zustand $|\varphi\rangle_{(III)}$ vom bekannten Typ an.

$$|\varphi\rangle_{(III)} = \prod_{\vec{k}}\frac{1}{4}\psi^+_{(II)}(\vec{k})\left(\frac{i\beta_2\vec{\sigma}\vec{k}\,\sigma_2}{\sqrt{\vec{k}^2+m^2}} - \beta_1\sigma_2 - \frac{m\sigma_2}{\sqrt{\vec{k}^2+m^2}}\right)\psi^{\#}_{(II)}(\vec{k})\,|0\rangle \qquad \text{(II,40)}$$

Der Energieerwartungswert in diesem Zustand ergibt:

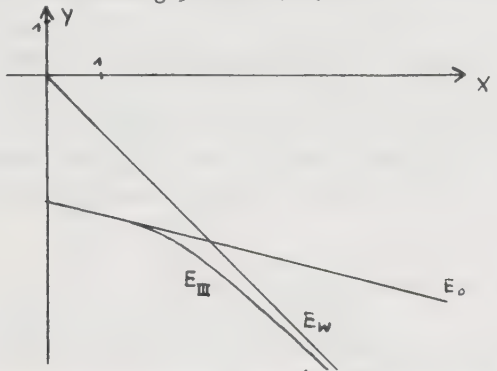
$${}_{(III)}\langle\varphi|H_{Bew} + H^{A\,(III)}_W|\varphi\rangle_{(III)} = \sum_{\vec{k}}\left(-2\sqrt{\vec{k}^2+m^2} + \frac{2m^2}{\sqrt{\vec{k}^2+m^2}}\right) +$$

$$+ 2Wz^3 + \frac{6W}{z^3}\left(\sum\frac{m}{\sqrt{\vec{k}^2+m^2}}\right)^2 + \frac{W}{z^3}\sum_{\vec{k}}\frac{2\kappa_3^2}{\vec{k}^2+m^2} \qquad \text{(II,41)}$$

Die Minimalbedingung für die Energie ergibt bis auf ein Vorzeichen wieder dieselbe Bestimmungsgleichung für m wie (II,17).

$$m = -\frac{6W}{Z^3}\sum_{\vec{k}}\frac{m}{\sqrt{\vec{k}^2+m^2}} \qquad \text{(II,42)}$$

Man erhält also bei gleichem $|W|$ dieselbe Masse wie bei positivem W. Der zu $\frac{\sqrt{Z}^7}{\iota}$ proportionale Anteil der Energie biegt auch an der gleichen Stelle $|W_0| = 0{,}183$ von der Energie der masselosen Urfermionen ab wie bei $W>0$. Der Verlauf der Energie E_{III} von $|\varphi\rangle_{(II)}$ ist in Abbildung 5 skizziert.



$x = \frac{8|W|}{\sqrt{Z}}\cdot\iota$

$y = \frac{E}{\sqrt{Z}^7}\cdot\iota$

$E_W = 8WZ^3$ (Grundzustandsenergie von H_W^A bei negativem W)

$E_o = \sum_{\vec{k}} -2|\vec{k}| \quad + 2WZ^3$ (Energie des Diracsees der masselosen Urfermionen)

Abb. 5

In der β_3-Darstellung wird $|\varphi\rangle_{(III)}$ recht unübersichtlich, so daß wir darauf verzichten $|\varphi\rangle^{\beta_3}_{(III)}$ anzugeben.

Wie wir früher schon gezeigt haben, lassen die Transformationen (II,6), (II,6a) und (II,38) bei ungeradem Z nicht mehr den ganzen Bewegungsoperator invariant, da die Randterme diese Symmetrien brechen. Wie man aber leicht nachrechnet machen die Randterme von H_{Bew} in der Energie höchstens einen Beitrag proportional zu $\frac{\sqrt{Z}^5}{\iota}$ aus. Solche Größenordnungen haben wir in dieser Rechnung jedoch

nicht in Betracht gezogen, so daß die hier erhaltenen Ergebnisse für ungerades Z die gleiche Gültigkeit haben.

Bei den hier abgeleiteten Grundzustandsapproximationen war die Form $\vec{\kappa} = \frac{\sqrt{2}}{L} \sin \frac{2\pi}{2} \cdot \vec{k}$ der Dispersionsbeziehung wesentlich, da bei dieser Dispersionsbeziehung der Bewegungsoperator im Ortsraum nur zwei und zwar Nachbarpunkte verbindet. Der Vorteil der Transformationen (II,6) und (II,6a) besteht darin, daß es Drehungen im β Raum um die β_1 bzw. β_2 Achse sind, die H_{Bew} invariant lassen (bei ungeradem Z bis auf einen unwesentlichen Teil von H_{Bew}) und daß sie im Ortsraum lokal sind. Die Lokalität ist dabei für das günstige Transformationsverhalten von H_W^A wichtig. Nehmen wir nun an, wir hätten einen Bewegungsoperator der Form:

$$H'_{Bew} = \sum_{\vec{n},\vec{n}'} \varphi^+(\vec{n})\, B(\vec{n},\vec{n}')\, \varphi(\vec{n}') \quad ; \quad B(\vec{n},\vec{n}') = \beta_3 \vec{\sigma} \vec{b}(\vec{n},\vec{n}') \qquad \text{(II,43)}$$

Wir versuchen nun (II,6) unter Beibehaltung der Lokalität dieser Dispersionsbeziehung anzupassen und setzen die folgende Transformation an:

$$\varphi(\vec{n}) = (a_0(\vec{n}) + a_1(\vec{n})\,\beta_1)\,\varphi(\vec{n}) \qquad \text{(II,44)}$$

Aus der Invarianz H'_{Bew} gegenüber (II,44) erhalten wir unter anderem die Bedingungen:

$$a_0^*(\vec{n}) \cdot a_1(\vec{n}') \cdot b_i(\vec{n},\vec{n}') = a_1^*(\vec{n})\, a_0(\vec{n}') \cdot b_i(\vec{n},\vec{n}') \qquad \text{für alle } i,\vec{n},\vec{n}' \qquad \text{(II,45)}$$

Gibt es nun drei Punkte $\vec{n}$, $\vec{n}'$, $\vec{n}''$, mit

$$b_i(\vec{n},\vec{n}') \neq 0 \;, \quad b_i(\vec{n},\vec{n}'') \neq 0 \;, \quad b_i(\vec{n}',\vec{n}'') \neq 0 \qquad \text{(II,46)}$$

so erhalten wir zusammen mit der Unitarität das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
&a_0^*(\vec{n})\, a_1(\vec{n}') = a_1^*(\vec{n})\, a_0(\vec{n}') \quad ; \quad a_0^*(\vec{n})\, a_1(\vec{n}) = -a_1^*(\vec{n})\, a_0(\vec{n}) \\
&a_0^*(\vec{n})\, a_1(\vec{n}'') = a_1^*(\vec{n})\, a_0(\vec{n}'') \quad ; \quad a_0^*(\vec{n}')\, a_1(\vec{n}') = -a_1^*(\vec{n}')\, a_0(\vec{n}') \\
&a_0^*(\vec{n}')\, a_1(\vec{n}'') = a_1^*(\vec{n}')\, a_0(\vec{n}'') \quad ; \quad a_0^*(\vec{n}'')\, a_1(\vec{n}'') = -a_1^*(\vec{n}'')\, a_0(\vec{n}'')
\end{aligned} \qquad \text{(II,47)}$$

Da a_1 ungleich Null ist und a_0, wie aus den weiteren Invarianzbedingungen von H'_{Bew} folgt, ebenfalls, erkennt man leicht, daß (II,47) nicht lösbar ist. Das gleiche gilt auch für die Transformationen (II,6a) und (II,38), so daß man also alle diese Transformationen, wenn (II,46) gilt, unter Beibehaltung der Lokalität nicht so modifizieren kann, daß sie H'_{Bew} invariant lassen. Eine im Gitterraum häufig verwendete Dispersionsbeziehung ist der "Sägezahn":

$$\vec{K} = \frac{1}{i\sqrt{2}} \cdot \vec{k} \qquad \text{(II,48)}$$

Diese Dispersionsbeziehung erfüllt (II,46) für beliebige $\vec{n}$, $\vec{n}'$, $\vec{n}''$, so daß wir nicht die gleichen Verhältnisse schaffen können wie bei der Sinusdispersionsbeziehung. Wir nennen den Bewegungsoperator mit (II,48) $H^S_{Bew.}$ Wenn wir die Transformation (II,6a) anwenden, ändert sich nun auch der Bewegungsoperator und wir erhalten:

$$H^{S(\mathrm{II})}_{Bew} = \frac{1}{2\cdot i\sqrt{2}} \sum_{\vec{k}} \Big\{ \psi^+_{(\mathrm{II})}(\vec{k})\, \rho_3\, \vec{v}_i(\vec{k})\, \vec{\sigma}\, \psi_{(\mathrm{I})}(\vec{k}) +$$

$$+ \psi^+_{(\mathrm{I})}(\vec{k})\, \rho_3 \vec{\sigma} \vec{k}\, \psi(\vec{k} - \vec{v}_i(\vec{k})) + \psi^+_{(\mathrm{I})}(\vec{k} - \vec{v}_i(\vec{k}))\, \rho_1 \vec{\sigma} \vec{k}\, \psi_{(\mathrm{I})}(\vec{k}) \Big\} \qquad \text{(II,49)}$$

($\vec{v}_i$ wie üblich) Entsprechend $|\varphi\rangle_{(\mathrm{II})}$ definieren wir den Zustand

$$|\varphi\rangle^S_{(\mathrm{I})} = \overrightarrow{\prod_{\vec{k}}} \frac{1}{4} \psi^+(\vec{k}) \left(\frac{i\rho_2 \vec{u}_i(\vec{k}) \vec{\sigma} \sigma_2}{\sqrt{\vec{u}_i^2(\vec{k}) + m^2}} - \rho_1 \sigma_2 - \frac{m\sigma_2}{\sqrt{\vec{u}_i^2(\vec{k}) + m^2}} \right) \psi^{H(\vec{k})} |0\rangle \qquad \text{(II,50)}$$

$$\vec{u}_i(\vec{k}) = \frac{\vec{v}_i(\vec{k})}{2i\sqrt{2}}$$

Der Energieerwartungswert in $|\varphi\rangle^S_{(\mathrm{II})}$ wird:

$$\langle \varphi | H^{S(\mathrm{II})}_{Bew} + H^{A(\mathrm{II})}_{W} | \varphi \rangle^S_{(\mathrm{II})} =$$

$$= \sum_{\vec{k}} \left(-2\sqrt{\vec{u}_i^2(\vec{k}) + m^2} + \frac{2m^2}{\sqrt{\vec{u}_i^2(\vec{k}) + m^2}} \right) - \frac{6W}{2^3} \left(\sum_{\vec{k}} \frac{m}{\sqrt{\vec{u}_i^2(\vec{k}) + m^2}} \right)^2 + 2W2^3 \qquad \text{(II,51)}$$

m bestimmt sich aus der üblichen Minusbedingung:

$$m = \frac{6W}{z^3} \sum_{\vec{h}} \frac{m}{\sqrt{\mu_i^2(\vec{h}) + m^2}} \qquad \text{(II,52)}$$

Da $\mu_i^2(\vec{h}) = \text{const.} = \frac{3}{16} \cdot \frac{z}{l^2}$ ist, ist die Rechnung hier sehr einfach. Die Minimumsbedingung (II,52) läßt sich dann folgendermaßen schreiben:

$$1 = \frac{6W}{\sqrt{\frac{3}{16}\frac{z}{l^2} + m^2}} \qquad \text{(II,53)}$$

Unter Verwendung von $W = W_0 \frac{\sqrt{z}}{l}$; $m = m_0 \frac{\sqrt{z}}{l}$ wird daraus:

$$1 = \frac{6W_0}{\sqrt{\frac{3}{16} + m_0^2}} \qquad \text{oder} \quad m_0 = \sqrt{36 W_0^2 - \frac{3}{16}} \qquad \text{(II,54)}$$

Wegen (II,54) muß $W_0 \geq \frac{\sqrt{3}}{24}$ sein, damit ein Minimum vorliegt. Dies entspricht dem Abzweigen der Energiekurve bei $W_0 = 0{,}183$ für die Lösung $|\varphi\rangle_{(II)}$. Für $W_0 \geq \frac{\sqrt{3}}{24}$ kann man die Energie in sehr einfacher Form anschreiben:

$$\begin{aligned} &{}^{S}_{(II)}\langle\varphi| H^{S(II)}_{Bew} + H^{A(II)}_{W} |\varphi\rangle^{S}_{(II)} = \\ &= -4Wz^3 - \frac{\vec{u}_i^2}{6W} = \frac{\sqrt{z}}{l}\left(-4W_0 - \frac{3}{16W_0}\right) \end{aligned} \qquad \text{(II,55)}$$

Die Größe $\vec{u}_i^2(\vec{h})$ hat eine anschauliche Bedeutung, es gilt nämlich $\vec{u}_i^2(\vec{h}) = \frac{1}{4} \cdot \text{Max}\,(\vec{k}^2)$. Wir haben mit (II,55) für die Sägezahndispersionsbeziehung für große W_0 fast das gleiche Verhalten der Energie wie in (II,15) bei der Sinusdispersionsbeziehung. Für kleine W_0 dagegen liegt die Energie (II,51) etwas über der des Diracsees der masselosen Urfermionen mit Sägezahndispersionsbeziehung, wenn W_0 jedoch größer als $\frac{\sqrt{3}}{24}$ ist, kommen wir sehr schnell unter die Diracseeenergie. Das Resultat unserer Rechnungen ist insofern etwas unerwartet, als wir mit einer Methode, die ganz wesentlich auf der Sinusdispersionsbeziehung und deren Entartungsverhältnissen basierte, für eine davon wesentlich verschiedene Dispersionsbeziehung eine noch fast gleich gute Grundzustandsapproximation erhalten haben. Wenn wir die in diesem Kapitel erhaltenen Ergebnisse mit

den Rechnungen für die B-Wechselwirkung vergleichen, stellen wir fest, daß die Grundzustandsenergie für die A-Wechselwirkung in Abhängigkeit von N prinzipiell das gleiche Verhalten hat wie bei der B-Wechselwirkung.

Wir verlassen nun vorerst das Grundzustandsproblem, um uns einer Untersuchung der inneren Symmetrieen der Theorie zuzuwenden. Dabei werden wir u. a. exakte Lösungen zur Teilchenzahl $2Z^3$ erhalten. Es werden aber auch strukturelle Eigenschaften der Theorie offenbar werden, die uns weitergehende Aussagen über das Grundzustandsproblem machen lassen werden.

III. Innere Symmetrien der Gitterraumtheorie mit H_W^A-Wechselwirkung

Aus Gründen, die im Weiteren klar werden, gehen wir hier von der auf F. Bopp zurückgehenden B-Darstellung der Theorie aus. Unter "inneren" Symmetrien verstehen wir unter Einbeziehung der Transformationen vom Pauli - Gürsey Typ diejenigen Transformationen der Form:

$$\varphi(\vec{n}) = A\varphi'(\vec{n}) + B\varphi'^{*}(\vec{n}) \qquad \text{(III,1)}$$

die den Hamiltonoperator und die Jordan-Wignerschen Vertauschungsrelationen invariant lassen. Mit den von F. Bopp eingeführten achtkomponentigen Spinoren

$$\hat{\varphi}(\vec{n}) = \begin{pmatrix} \varphi(\vec{n}) \\ \varphi^{*}(\vec{n}) \end{pmatrix} \quad ; \quad \hat{\varphi}(\vec{k}) = \begin{pmatrix} \varphi(\vec{k}) \\ \varphi^{*}(-\vec{k}) \end{pmatrix} \qquad \text{(III,2)}$$

lassen sich die Transformationen (III,1) geschlossener zusammenfassen:

$$\hat{\varphi}(\vec{n}) = \hat{u}\,\hat{\varphi}'(\vec{n}) \quad ; \quad \hat{u} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^{*} & A^{*} \end{pmatrix} \qquad \text{(III,3)}$$

Wegen der Invarianz der Jordan-Wignerschen Vertauschungsrelationen muß gelten:

$$\hat{u}^{+}\hat{u} = \hat{u}\,\hat{u}^{+} = 1 \qquad \text{(III,4)}$$

Es sind aber nicht alle unitären Matrizen zugelassen, sondern nur solche, die die Form (III,3) haben. Man kann diese Bedingung auch folgendermaßen ausdrücken:[1]

$$\lambda_1 \hat{u} \lambda_1 = \hat{u}^{*} \quad ; \quad \lambda_i = \sigma_i \times 1 \times 1 \qquad \text{(III,5)}$$

Seien $\hat{U}_1$ und $\hat{U}_2$ zwei Transformationen, die (III,4) und (III,5) erfüllen, so erfüllt $\hat{U} = \hat{U}_1 \hat{U}_2$ und $\hat{U}' = \hat{U}_2 \hat{U}_1$ die gleichen Be-

1) Wenn wir mit achtkomponentigen Spinoren rechnen, haben die Matrizen f_B, σ_B die Bedeutung $1 \times f_B$, $1 \times \sigma_B$

dingungen. Die Matrizen $\hat{U}$ mit (III,4) und (III,5) bilden also in Bezug auf die Matrizenmultiplikation eine Gruppe. Da sie mit der Einheit zusammenhängen, ist eine Darstellung mit infinitesimalen Operatoren $\hat{T}_i$ in der Form

$$\hat{u} = e^{2\pi i \sum_i \alpha_i \hat{T}_i} \qquad \alpha_i \text{ reell} \qquad \text{(III,6)}$$

möglich. Für die $\hat{T}$ gilt wegen (III,3) :

$$\lambda_1 \hat{T} \lambda_1 = -\hat{T}^* \qquad \text{(III,7)}$$

Wir können nun den Hamiltonoperator durch die achtkomponentigen Spinoren ausdrücken. Es zeigt sich, daß die Darstellung des Hamiltonoperators durch $\hat{\psi}$ Spinoren besonders einfach wird, wenn man von B-Darstellung ausgeht. Der Grund dafür ist die Antisymmetrie der Matrizen ρ_i^{β} und σ_i^{β}. Mit $\hat{\psi}^T_{\beta}(\vec{n}) = (\hat{\psi}^T_{\beta}(\vec{n}), \hat{\psi}^+_{\beta}(\vec{n}))$ erhalten wir:

$$H = \sum_{\vec{k}} \tfrac{1}{2} \hat{\psi}^+_{\beta}(\vec{k})\, \rho_1^{\beta} \vec{k} \vec{\sigma}^{\beta} \hat{\psi}_{\beta}(\vec{k}) +$$

$$+ \frac{W}{4} \sum_{\vec{n}} \Big\{ \hat{\psi}^+_{\beta}(\vec{n}) \vec{\sigma}^{\beta} \hat{\psi}_{\beta}(\vec{n}) \hat{\psi}^+_{\beta}(\vec{n}) \vec{\sigma}^{\beta} \hat{\psi}_{\beta}(\vec{n}) - \hat{\psi}^+_{\beta}(\vec{n}) \rho_1^{\beta} \hat{\psi}_{\beta}(\vec{n}) \hat{\psi}^+_{\beta}(\vec{n}) \rho_1^{\beta} \hat{\psi}_{\beta}(\vec{n}) \Big\} \qquad \text{(III,8)}$$

Es tauchen überhaupt keine λ Matrizen auf. Wir suchen nun alle Operatoren der Form $\hat{\theta}_i = \sum_{\vec{n}} \hat{\psi}^+_{\beta}(\vec{n}) \hat{T}_i \hat{\psi}_{\beta}(\vec{n})$, die mit H vertauschen. Wegen der Hermitezität von $\hat{T}_i$ und (III,7) haben die folgenden vierOperatoren diese Eigenschaft:

$$\hat{\theta}_0 = \sum_{\vec{n}} \hat{\psi}^+_{\beta}(\vec{n})\, \rho_1^{\beta} \hat{\psi}_{\beta}(\vec{n}) \quad ; \quad \hat{\theta}_3 = \sum_{\vec{n}} \hat{\psi}^+_{\beta}(\vec{n}) \lambda_3 \hat{\psi}_{\beta}(\vec{n}) \quad ;$$

$$\hat{\theta}_1 = \sum_{\vec{n}} \hat{\psi}^+_{\beta}(\vec{n})\, \lambda_1 \rho_1^{\beta} \hat{\psi}_{\beta}(\vec{n}) \quad ; \quad \hat{\theta}_2 = \sum_{\vec{n}} \hat{\psi}^+_{\beta}(\vec{n}) \lambda_2 \rho_1^{\beta} \hat{\psi}_{\beta}(\vec{n}) \qquad \text{(III,9)}$$

Die Operatoren $\hat{\theta}_\mu$ sind damit die Erzeugenden von Symmetrietransformationen. $\hat{\theta}_1$ und $\hat{\theta}_2$ führen auf Transformationen von Pauli-Gürsey-Typ, während $\hat{\theta}_0$ und $\hat{\theta}_3$ zu wohlbekannten Transformationen führen, und zwar gehört $\hat{\theta}_3$ zur Phasentransformation mit der Teilchenzahl als infinitesimalen Operator, $\hat{\theta}_0$ zur Touschektransformation. Aus (III,9) folgt, daß die von $\hat{\theta}_0$ erzeugten Transformationen mit den von $\hat{\theta}_i$ (i=1,2,3) erzeugten vertauschen. Sie bilden also eine einparametrige Eichgruppe. Aus den Vertauschungsrelationen der Operatoren $\hat{\theta}_i$ (i=1,2,3) sieht man, daß diese Operatoren eine SU (2) Gruppe erzeugen. Wir nennen diese innere SU(2) Symmetrie von H im Weiteren Isospin. Es ist aber klar, daß ihre physikalische Interpretation als Isospin problematisch ist aus den folgenden Gründen: Wir brauchen nämlich eine Eichgruppe, z.B. für die Teilchenzahl oder Baryonenzahl. Dafür hatten wir zwei Kandidaten, die Phasentransformation oder die Touschektransformation. Erstere ist eine abelsche Untergruppe der SU(2) (Drehungen um die dritte Achse) und vertauscht nicht mit den anderen SU(2) Transformationen. Die Touschektransformationen vertauschen zwar mit der SU(2) nicht aber mit der Parität. Trotzdem hat die SU(2) Symmetrie natürlich weitreichende mathematische Konsequenzen, die ihre Diskussion für das Verständnis der Theorie notwendig machen. DieA-Wechselwirkung ist übrigens die einzige lorentzinvariante Vierfermionenwechselwirkung einer vierkomponentigen Theorie, die ein SU(2) als innere Symmetrie zuläßt. Für Theorien mit größerer Komponentenzahl kann man zeigen, daß es immer möglich ist durch entsprechende Wahl des Wechselwirkungsoperators eine lorentzinvariante 4n - komponentige Theorie mit der inneren Symmetrie SU(2n) zu konstruieren. Wir werden die höherkomponentigen Theorien nicht weiter untersuchen, sondern bleiben bei der Komponentenzahl vier.

Die SU(2) Transformationen sind in der B-Darstellung und natürlich auch in der β_3 -Darstellung i. A. vom Pauli-Gürsey Typ, vertauschen also nicht mit der Teilchenzahl. Das macht aber die Rechnung unhandlich, so daß wir zu einer auf H. P. Dürr[1] zurückgehenden Darstellung übergehen, in der die SU(2) Transformationen die Gestalt $\psi \to A \cdot \psi$ haben. Wir nennen diese Darstellung D-Darstellung und bezeichnen alle sich auf sie beziehenden Größen mit dem Index D. Im Gitterraum ist es ohne weiteres möglich, eine mathematisch einwandfreie unitäre Trans-

1) siehe l.c. VII

formation anzugeben, die die B- und D-Darstellung verbindet. Sei U folgendermaßen definiert:

$$U\psi_D(\vec{n})U^{-1} = \psi_B(\vec{n}) = M(u)\psi_D(\vec{n}) \quad ; \quad U|0\rangle_D = |0\rangle_B \qquad \text{(III,10)}$$

$|0\rangle_B$ und $|0\rangle_D$ sind die Vakua der entsprechenden Darstellungen mit $\psi_B(\vec{n})|0\rangle_B = 0$ und $\psi_D|0\rangle_D = 0$. Die Transformation U lautet dann:

$$U = e^{i\frac{\pi}{2}\left\{\sum_{\vec{n}} \frac{1}{2}\psi_D^+(\vec{n})A\psi_D^+(\vec{n}) + \frac{1}{2}\psi_D^T(\vec{n})A\psi_D(\vec{n})\right\}}.$$

$$\cdot e^{i\sum_{\vec{n}}\left\{\frac{\pi}{2}\psi_D^+(\vec{n})\psi_D(\vec{n}) - \frac{\pi}{4}\psi_D^+(\vec{n})\beta_3\psi_D(\vec{n})\right\}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}\sum_{\vec{n}}\psi_D^+(\vec{n})\sigma_2\psi_D(\vec{n})} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}\sum_{\vec{n}}\psi_D^+(\vec{n})\beta_2\sigma_2\psi_D(\vec{n})}$$

Dabei ist $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^P \end{pmatrix}$; $\beta_i = \sigma_i^P \times 1$; $\sigma_i = 1 \times \sigma_i^P$ (III,11)

Mit (III,10) errechnen wir das Transformationsgesetz der Feldoperatoren, das wir gleich in der achtkomponentigen Form angeben.

$$\hat{\psi}_B(\vec{n}) = \begin{pmatrix} a\begin{pmatrix} 1+i\sigma_2 & 0 \\ i+\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} & a\begin{pmatrix} 0 & 1+i\sigma_2 \\ 0 & -i-\sigma_2 \end{pmatrix} \\ a^*\begin{pmatrix} 0 & 1+i\sigma_2 \\ 0 & i+\sigma_2 \end{pmatrix} & a^*\begin{pmatrix} 1+i\sigma_2 & 0 \\ -i-\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \hat{\psi}_D(\vec{n}) \qquad a = \frac{1-i}{2\sqrt{2}}$$

(III,12)

Der Hamiltonoperator hat nun die Form:[1]

$$H^{(D)} = \sum_{\vec{n}} \psi_D^+(\vec{n})\vec{\kappa}\vec{\sigma}\psi_D(\vec{n}) + W\cdot\sum_{\vec{n}}\left\{\psi_D^+(\vec{n})\vec{\sigma}\psi_D(\vec{n})\psi_D^+(\vec{n})\vec{\sigma}\psi_D(\vec{n}) - \right.$$

$$\left. - \psi_D^+(\vec{n})\psi_D(\vec{n})\psi_D^+(\vec{n})\psi_D(\vec{n}) + 4\psi_D^+(\vec{n})\psi_D(\vec{n}) - 4\right\} \qquad \text{(III,13)}$$

1) Die Feldoperatoren in (III,13) sind natürlich die gewohnten vierkomponentigen.

$H^{(D)}$ hat dieselbe Form für jede Dispersionsbeziehung für die gilt: $\vec{k}\ (\ -\vec{h}\ ) = -\vec{k}\ (\vec{h})$. In Normaldarstellung hat $H^{(D)}$ folgendes Aussehen:

$$H^{(D)} = \sum_{\vec{h}} \psi_D^+(\vec{h})\, \vec{k}\vec{\sigma}\, \psi_D(\vec{h}) +$$

$$+ W \sum_{\vec{h}} \{ -\psi_D^+(\vec{h})\sigma_2 \vec{\beta}\beta_2 \psi_D^*(\vec{h})\, \psi_D^T(\vec{h})\sigma_2\beta_2 \vec{\beta}\psi_D(\vec{h}) + 6\psi_D^+(\vec{h})\psi_D(\vec{h}) - 4 \} \qquad \text{(III,14)}$$

Die Isospintransformationen werden in der D-Darstellung von den β Matrizen übernommen; da in (III,13) überhaupt keine $\beta-$ Matrizen vorkommen, ist die Isospininvarianz hier offensichtlich. Die allgemeine Isospintransformation hat nun die Form:

$$T = e^{-\sum_{\vec{n}} (\vec{\pi}\psi_D^+(\vec{n})\beta_2\vec{\beta}\beta_2\psi_D(\vec{n}))\cdot\vec{\omega}} = e^{i\pi \sum_{\vec{n}} \psi_D^+(\vec{n})\vec{\omega}\vec{\beta}^T\psi_D(\vec{n})} \qquad \text{(III,15)}$$

Die Feldoperatoren transformieren sich damit in der folgenden Weise:

$$T\psi_D(\vec{n})\,T^{-1} = e^{-i\pi\vec{\omega}\vec{\beta}^T}\psi_D(\vec{n})$$

$$T\psi_D^*(\vec{n})\,T^{-1} = e^{i\pi\vec{\omega}\vec{\beta}}\psi_D^*(\vec{n}) \qquad \text{(III,16)}$$

Wir wollen hier noch bemerken, daß der Wechselwirkungsoperator allein als innere Symmetrie die Gruppe (SU(2) X SU(2))x····· x (Z^3 mal)x····x X (SU(2) X SU(2)) hat, entsprechend einer SU(2) für den Isospin und einer SU(2) für den Spin an jedem Punkt des Ortsraumes. Der Bewegungsoperator zerstört jedoch wegen seiner Nichtlokalität diese hohe Symmetrie, so daß für den gesamten Hamiltonoperator nur eine ((SU(2) X SU(2)) Symmetrie bleibt. Um die Transformationseigenschaften für Spin und Isospin besser trennen zu können, führen wir zweifach indizierte Feldoperatoren ein.

$$\psi_{D_1}(\vec{n}) = \psi_{D_{11}}(\vec{n}) \quad ; \quad \psi_{D_2}(\vec{n}) = \psi_{D_{12}}(\vec{n})$$

$$\psi_{D_3}(\vec{n}) = \psi_{D_{21}}(\vec{n}) \quad ; \quad \psi_{D_4}(\vec{n}) = \psi_{D_{22}}(\vec{n}) \qquad \text{(III,17)}$$

Die τ -Matrizen wirken nur auf den ersten Index, die σ- Matrizen nur auf den zweiten Index. Für das Ruhsystem gilt:

$\psi^+_{D_{1i}}(\vec{n})$ hat Isospin $\frac{1}{2}$; $\psi^+_{D\mu 1}(\vec{n})$ hat Spin $\frac{1}{2}$

$\psi^+_{D_{2i}}(\vec{n})$ " " $-\frac{1}{2}$; $\psi^+_{D\mu 2}(\vec{n})$ " " $-\frac{1}{2}$ (III,18)

Die lokalen Einteilchenzustände $\psi^+_{D\mu i}(\vec{n})|0\rangle_D$ bilden ein Spin und Isospindublett und somit eine (1/2, 1/2) Darstellung der der von Spin und Isospin gebildeten SO(4). Die Eigenwerte der dritten Komponenten T_3 und S_3 ergeben sich gemäß (III,18). Die vier lokalen Einteilchenzustände haben alle die Wechselwirkungsenergie 2W. Die lokalen Zweiteilchenzustände schreiben wir $\psi^+_D(\vec{n})\, A\, \psi^+_D(\vec{n})|0\rangle_D$. Wegen der Antisymmetrie von A gibt es nur sechs solche Zustände.
Wir klassifizieren sie nach ihren Spin und Isospineigenschaften.
Die sechs Zustände zerfallen in zwei Tripletts, entsprechend einer (1,0) und einer (0,1) Darstellung der SO(4). In den Symbolen (1/2, 1/2) , (1,0) ..... sol sich die erste Zahl auf den Isospin und die zweite auf den Spin beziehen,

Zustand	T	T_3	S	S_3	E_W	Darst.
$\frac{1}{4}\psi^+_D(\vec{n})(\tau_0+\tau_3)\sigma_2\psi^{+*}_D(\vec{n})\|0\rangle_D$	1	1	0	0	0	
$\frac{1}{2\sqrt{2}}\psi^+_D(\vec{n})\,\tau_1\sigma_2\,\psi^{+*}_D(\vec{n})\|0\rangle_D$	1	0	0	0	0	(1,0)
$\frac{1}{4}\psi^+_D(\vec{n})(\tau_0-\tau_3)\sigma_2\psi^{+*}_D(\vec{n})\|0\rangle_D$	1	-1	0	0	0	

Zustand	T	T_3	S	S_3	E_W	Darst.
$\frac{1}{4}\psi_D^+(\vec{n})\,\beta_2(\sigma_0+\sigma_3)\psi_D^+(\vec{n})\,|0\rangle_D$	0	0	1	1	$8W$	$(0,1)$
$\frac{1}{2\sqrt{2}}\psi_D^+(\vec{n})\,\beta_2\sigma_1\,\psi_D^+(\vec{n})\,|0\rangle_D$	0	0	1	0	$8W$	
$\frac{1}{4}\psi_D^+(\vec{n})\,\beta_2(\sigma_0-\sigma_3)\psi_D^+(\vec{n})\,|0\rangle_D$	0	0	1	-1	$8W$	

(III,19)

Da auch in der D-Darstellung Teilchen-Lochsymmetrie gilt, haben die vier Dreiteilchenzustände:

$$|3\rangle_{D\iota} = \frac{1}{6}(\beta_2\sigma_2)_{\iota\kappa}\,\epsilon_{\kappa\mu\nu\rho}\,\psi_{D\mu}^+(\vec{n})\,\psi_{D\nu}^+(\vec{n})\,\psi_{D\rho}^+(\vec{n})\,|0\rangle_D \qquad \text{(III,20)}$$

ebenfalls Wechselwirkungsenergie $E_W = 2W$. Ihre Spin und Isospineigenschaften sind:

Zustand	T	T_3	S	S_3	Darstellungssymbol
$\|3\rangle_{D1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
$\|3\rangle_{D2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
$\|3\rangle_{D3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$\|3\rangle_{D4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	

(III,21)

Es bleiben noch das Vakuum und der Vierteilchenzustand $|4\rangle_D$. Beide haben T = 0 und S = 0. Ihre Wechselwirkungsenergien sind ebenfalls gleich und zwar $-4WZ$. Das lokale Energiespektrum, das in l.c.IV angegeben wurde, aber in der B_-Darstellung schwer durchschaubar ist, hat in der D-Darstellung eine einfache gruppentheoretische Erklärung gefunden.

Wie man schon am Bewegungsterm in (III,13), der einer doppelten Weyl-Gleichung entspricht, sieht, unterscheiden sich die B- und D-

Darstellung hinsichtlich der Darstellung der homogenen Lorentzgruppe. Die Feldoperatoren $\psi_B(\vec{n})$ transformieren sich nach einer $(\frac{1}{2},0) + (0,\frac{1}{2})$ Darstellung der Lorentzgruppe. Eine allgemeine homogene Lorentztransformation hat in der B-Darstellung die Gestalt:

$$\psi'_B(\vec{n}') = e^{i\pi(\vec{\omega}_1\vec{\sigma}^B + i\vec{\omega}_2\beta_4^B\vec{\sigma}^B)}\psi_B(\vec{n}) \qquad \text{(III,22)}$$

Wir transformieren nun auf die D-Darstellung. Dabei geht die Beziehung (III,22) über in:

$$\psi'_D(\vec{n}') = e^{i\pi(\vec{\omega}_1\vec{\sigma} + i\vec{\omega}_2\vec{\sigma})}\psi_D(\vec{n}) \qquad \text{(III,23)}$$

(III,23) ist das Transformationsverhalten einer $(\frac{1}{2},0) + (\frac{1}{2},0)$ Darstellung, wie man sie für masselose Fermionen hat. Die Erklärung für die unterschiedliche Darstellun der Lorentzgruppe ist darin zu suchen, daß die Transformation (III,12) $\psi_B(\vec{n})$ und $\psi_B^+(\vec{n})$ mischt. Der Spinor $\hat{\psi}_B(\vec{n})$ transformiert sich gemäß einer $\left[(\frac{1}{2},0)+(0,\frac{1}{2})\right]+\left[(0,\frac{1}{2})+(\frac{1}{2},0)\right]$ Darstellung. (III,12) transformiert $\hat{\psi}_B(\vec{n})$ auf $\hat{\psi}_D(\vec{n})$ und zwar so, daß die beiden $(\frac{1}{2},0)$ Anteile auf die ersten vier Komponenten von $\hat{\psi}_D(\vec{n})$ und die beiden $(0,\frac{1}{2})$ Anteile auf die letzten vier Komponenten von $\hat{\psi}_D(\vec{n})$ fallen. Entsprechend erscheint die Parität der B-Darstellung, die die $(\frac{1}{2},0)$ und $(0,\frac{1}{2})$ Anteile verbindet, in der D-Darstellung als eine der G-Parität ähnliche Transformation nämlich als

$$\psi_D(\vec{n}) \xrightarrow{P} i\rho_2\sigma_2\psi_D^*(-\vec{n}) \qquad \text{(III,24)}$$

Es ist interessant, nachzusehen wie die Phasentransformation und die Touschektransformation der B-Darstellung in der D-Darstellung aussehen. Mit (III,12) werden daraus die folgenden Transformationen:

B-Darstellung		D-Darstellung
Phasentransformation		
$e^{i\varphi\sum_{\vec{n}}\psi_B^+(\vec{n})\psi_B(\vec{n})}$	$\longleftrightarrow$	$e^{i\varphi\sum_{\vec{n}}(\psi_D^+(\vec{n})\beta_3\psi_D(\vec{n})+2)}$

Teilchenzahl:

$$\sum_{\vec{n}} \psi^{+}_{B}(\vec{n})\,\psi_{B}(\vec{n}) \quad \longleftrightarrow \quad \sum_{\vec{n}} \left\{ \psi^{+}_{D}(\vec{n})\,\beta_3\,\psi_{D}(\vec{n}) + 2 \right\} = 2\cdot T_3 + 2Z^3 \qquad \text{(III,25)}$$

Touschektransformation

$$e^{i\beta \sum_{\vec{n}} \psi^{+}_{B}(\vec{n})\,\beta_1^{\,B}\,\psi_{B}(\vec{n})} \quad \longleftrightarrow \quad e^{i\beta \sum_{\vec{n}} \left(\psi^{+}_{D}(\vec{n})\,\psi_{D}(\vec{n}) - 2\right)}$$

Helizität:

$$\frac{1}{2} \sum_{\vec{n}} \psi^{+}_{B}(\vec{n})\,\beta_1^{\,B}\,\psi_{B}(\vec{n}) \quad \longleftrightarrow \quad \sum_{\vec{n}} \frac{1}{2}\,\psi^{+}_{D}(\vec{n})\,\psi_{D}(\vec{n}) \quad - Z^3 \qquad \text{(III,26)}$$

Die Teilchenzahl der B-Darstellung hängt also mit der dritten Komponente des Isospins der D-Darstellung zusammen, und zwar so, daß insbesondere alle Zustände der D-Darstellung mit $T_3=0$ in der B-Darstellung die Teilchenzahl $2Z^3$ haben. Umgekehrt ist die Teilchenzahl der D-Darstellung bis auf eine Konstante gleich der Helizität der B-Darstellung, so daß alle Zustände der B-Darstellung mit Helizität Null in der D-Darstellung $2Z^3$ Teilchen haben.

Der Grundzustand von H^{A}_{ij} ist wegen der $\gamma_5\,(\beta_1^{\,B})$ Invarianz 2^{Z^3} - fach entartet. Es sind nämlich alle Zustände der D-Darstellung, bei denen jeder Punkt im Ortsraum gar nicht oder vierfach besetzt ist, Grundzustände von H^{A}_{W}. Sie haben alle die Energie $-4WZ^3$ und den Isospin T=0, so daß ihnen in der B-Darstellung Zustände mit $2Z^3$ Teilchen entsprechen, deren Helizitäten sich um 2n (n ganzzahlig) unterscheiden und von $-Z^3$ bis $+Z^3$ gehen. Unter diesen Zuständen sind auch zwei, die auch Eigenzustände von H_{Bew} sind mit dem Eigenwert Null, nämlich $|0\rangle_D$ und $|\bar{0}\rangle_D$. Dabei ist $|\bar{0}\rangle_D$ der Zustand, für den gilt: $\psi^{+}_{D_i}(\vec{n})\,|\bar{0}\rangle_D = 0$ für alle $\vec{n}$, i. Ihnen entsprechen in der B-Darstellung zwei exakte Eigenzustände des gesamten Hamiltonoperators zum Eigenwert $-4WZ^3$, mit der Teilchenzahl $2Z^3$ und den Helizitäten $-Z^3$ und $+Z^3$. $|0\rangle_D$ und $|\bar{0}\rangle_D$ sind keine Eigenzustände der Parität, jedoch sind es die Kombinationen:

$$|\psi\rangle_{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_D + |\bar{0}\rangle_D\right) \quad ; \quad |\psi\rangle_{-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_D - |\bar{0}\rangle_D\right) \qquad \text{(III,27)}$$

und zwar zu den Eigenwerten +1 und -1 der Parität. Wir wollen noch zweigen, wie die Zustände $|0\rangle_D$ und $|\overline{0}\rangle_D$ in der B-Darstellung aussehen. Aus (III,11) erhält man:

$$|0\rangle_B = \overline{\prod_{\vec{n}}} \psi_D^+(\vec{n}) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^P \end{pmatrix} \psi_D^*(\vec{n}) |0\rangle_D \qquad \text{(III,28)}$$

Wegen:

$$\overline{\prod_{\vec{n}'}} \psi_D^T(\vec{n}') \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^P \end{pmatrix} \psi_D(\vec{n}') \cdot \overline{\prod_{\vec{n}}} \psi_D^+(\vec{n}) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^P \end{pmatrix} \psi_D^*(\vec{n}) |0\rangle_D =$$

$$= |0\rangle_D \qquad \text{(III,29)}$$

gilt:

$$\overline{\prod_{\vec{n}}} \psi_D^T(\vec{n}) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^P \end{pmatrix} \psi_D(\vec{n}) |0\rangle_B = |0\rangle_D$$

$$\sigma_2^P = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(III,30)}$$

Vermittels der Inversen von (III,12) drücken wir $\psi_D(\vec{n})$ durch $\psi_B(\vec{n})$ aus und erhalten:

$$|0\rangle_D = \overline{\prod_{\vec{n}}} \psi_B^+(\vec{n}) \frac{(-i)}{4} \begin{pmatrix} \sigma_2^P & 1 \\ -1 & -\sigma_2^P \end{pmatrix} \psi_B^*(\vec{n}) |0\rangle_B \qquad \text{(III,31)}$$

Die Impulsdarstellung von (III,31) erhalten wir ganz einfach, wenn wir (III,12) im reziproken Gitter anschreiben:

$$\hat{\psi}_B(\vec{k}) = \begin{pmatrix} a \begin{pmatrix} 1+i\sigma_2^P & 0 \\ i+\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} & a \begin{pmatrix} 0 & 1+i\sigma_2^P \\ 0 & -i-\sigma_2^P \end{pmatrix} \\ a^* \begin{pmatrix} 0 & 1+i\sigma_2^P \\ 0 & i+\sigma_2^P \end{pmatrix} & a^* \begin{pmatrix} 1+i\sigma_2^P & 0 \\ -i-\sigma_2^P & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \hat{\psi}_D(\vec{k}) ; \quad \hat{\psi}_D(\vec{k}) = \begin{pmatrix} \psi_D(\vec{k}) \\ \psi_D^*(-\vec{k}) \end{pmatrix}$$

$$a = \frac{1-i}{2\sqrt{2}} \qquad \text{(III,32)}$$

Mit (III,32) prüft man leicht nach, daß für den Zustand

$$|\chi\rangle = \overline{\prod_{\vec{k}}} \psi_D^+(\vec{k}) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^P \end{pmatrix} \psi_D^{\#}(\vec{k}) |0\rangle_D$$

gilt: $\psi_{B_i}(\vec{k}) |\chi\rangle = 0 . |0\rangle_B$ ist jedoch bis auf eine Phase eindeutig bestimmt. Damit errechnen wir aus $|\chi\rangle$, wobei wir die Phase entsprechend (III,31) festsetzen:

$$|0\rangle_D = \overline{\prod_{\vec{k}}} \psi_B^+(\vec{k}) \cdot \frac{(-i)}{4} \begin{pmatrix} \sigma_2^P & 1 \\ -1 & -\sigma_2^P \end{pmatrix} \psi_B^{\#}(\vec{k}) |0\rangle_B \qquad \text{(III,33)}$$

An (III,31) und (III,33) sieht man leicht, daß $|0\rangle_D$ exakter Eigenzustand von $H^{(B)}$ ist. Da $\overline{|0\rangle}_D$ durch die Anwendung der Paritätstransformation auf $|0\rangle_D$ entsteht, gilt damit:

$$\overline{|0\rangle}_D = \overline{\prod_{\vec{k}}} \psi_B^+(\vec{k}) \frac{(-i)}{4} \begin{pmatrix} \sigma_2^P & -1 \\ 1 & -\sigma_2^P \end{pmatrix} \psi_B^{\#}(\vec{k}) |0\rangle_B \qquad \text{(III,34)}$$

bzw. im Ortsraum:

$$\overline{|0\rangle}_D = \overline{\prod_{\vec{n}}} \psi_B^+(\vec{n}) \frac{(-i)}{4} \begin{pmatrix} \sigma_2^P & -1 \\ 1 & -\sigma_2^P \end{pmatrix} \psi_B^{\#}(\vec{n}) |0\rangle_B \qquad \text{(III,35)}$$

Es ist leider nicht möglich, aus den übrigen Grundzuständen von H_W^A weitere exakte Eigenzustände zu konstruieren, die auch zu $E = -4WZ^3$ gehören und ähnlich einfach wie (III,34) und (III,35) sind, jedoch beliebige andere Helizitäten haben. Der Grund dafür ist, daß für solche Zustände die Wirkung von H_{Bew} und H_W^A nicht mehr so schön separiert, wie es bei den Zuständen (III,34) und (III,35) der Fall war. Wir können jedoch leicht noch eine Menge exakter Eigenzustände angeben, deren Helizitäten nicht auf $-Z^3$ oder $+ Z^3$ beschränkt sind, deren Energien aber über $-4WZ^3$ liegen. Der Operator A sei folgendermaßen definiert (unter der Voraussetzung, daß Z gerade ist) :

$$A = \frac{1}{\sqrt{z}^3} \sum_{\vec{n}} e^{i\pi \vec{\alpha}\vec{n}} \psi_D^+(\vec{n}) \tfrac{1}{4}(\rho_0+\rho_3)\sigma_2 \psi_D^{\#}(\vec{n}) \quad ; \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(III,36)}$$

Man rechnet leicht nach, daß der Zustand $|\eta_m\rangle = (A)^m |0\rangle_D$ ein exakter Eigenzustand des Hamiltonoperators ist mit dem Eigenwert:

$$H|\eta_m\rangle = (-4Wz^3 + m\cdot 4W)|\eta_m\rangle \qquad \text{(III,37)}$$

$|\eta_m\rangle$ ist auch Eigenzustand des Isospins mit:

$$T_3|\eta_m\rangle = m|\eta_m\rangle \quad ; \quad \vec{T}^2|\eta_m\rangle = m(m+1)|\eta_m\rangle \qquad \text{(III,38)}$$

Mit einer Drehung im Isospinraum transformieren wir $|\eta_m\rangle$ auf Zustände $|\eta_m\rangle'$, für die gilt:

$$T_3|\eta_m\rangle' = 0 \qquad \text{(III,39)}$$

Dann transformieren wir $|\eta_m\rangle'$ in die B-Darstellung und erhalten eine Menge von exakten Eigenzuständen $|\eta_m\rangle'_B$, für die gilt:

$$\left(\sum_{\vec{n}} \psi_B^+(\vec{n})\psi_B(\vec{n})\right)|\eta_m\rangle'_B = 2z^3|\eta_m\rangle'_B \quad ;$$

$$H|\eta_m\rangle'_B = 4W(-z^3+m)|\eta_m\rangle'_B$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\sum_{\vec{n}} \psi_B^+(\vec{n})\rho_1^B\psi_B(\vec{n})\right)|\eta_m\rangle'_B = (-z^3+m)|\eta_m\rangle'_B \quad ; \quad m \le z^3 \qquad \text{(III,40)}$$

Die Energie ist hier proportional zur Helizität. Der Zustand $|\eta'_{z^3}\rangle_B$ ist übrigens entartet zu $|0\rangle_B$.

Im Fall $W < 0$ übernehmen die Zustände des Spintripletts (III,19) die Rolle der Grundzustände. Die Verhältnisse sind hier insofern wesentlich von denen bei $W > 0$ verschieden, als der Entartungsgrad des Grundzustandes von H_3^A jetzt 3^{z^3} ist. Die Energie des Grundzustandes ist nun $8Wz^3$. wir sind in der Lage, einen exakten Eigenzustand des gesamten Hamiltonoperators mit dieser Energie anzugeben.

Dazu führen wir den Operator

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}^3} \sum_{\vec{n}} \psi_D^+(\vec{n}) \left(e^{i\vec{\pi}\vec{\beta}\vec{n}} + e^{i\pi\vec{\gamma}\vec{n}} \sigma_3 \right) \beta_2 \psi_D^*(\vec{n})$$

$$\vec{\beta}^T = (0,1,0) \qquad \vec{\gamma}^T = (1,0,0) \tag{III,41}$$

ein. B vertauscht mit dem Bewegungsoperator, nicht jedoch mit H_W^A. Trotzdem ist der Zustand

$$|\xi_m\rangle = (B)^m |0\rangle_D \tag{III,42}$$

wie man leicht nachrechnet exakter Eigenzustand des gesamten Hamiltonoperators. Die Zustände $|\xi_m\rangle$ haben die folgenden Eigenschaften:

$$H|\xi_m\rangle = (-4W z^3 + 12m \cdot W)\,|\xi_m\rangle \;;$$

$$S_3 |\xi_m\rangle = 0 \;;$$

$$T_3 |\xi_m\rangle = \vec{T}^2 |\xi_m\rangle = 0 \;; \qquad m \leq z^3 \tag{III,43}$$

Die Zustände $|\xi_m\rangle$ haben alle $T_3 = 0$, das heißt es sind alles Zustände, die in der B-Darstellung $2z^3$ Teilchen haben und wegen $T = 0$ nicht entartet sind zu Zuständen mit anderen Teilchenzahlen. $|\xi_{z^3}\rangle$ hat die Energie $8Wz^3$. Die Zustände $|\xi_m\rangle$ haben die Eigenschaft, daß der Vierfermionenanteil von (III,14) auf sie angewendet Null ergibt. Sie erfahren in der D-Darstellung in diesem Sinne überhaupt keine Wechselwirkung mit sich selbst oder irgendwelchen anderen Zuständen. Diskutieren wir noch kurz das Vakuum der B-Darstellung $|0\rangle_B$.

Aus (III,28) folgt, daß

$$T_3 |0\rangle_B = -z^3 |0\rangle_B \;; \quad \vec{T}^2 |0\rangle_B = z^3(z^3+1)\,|0\rangle_B \tag{III,44}$$

ist. Entsprechend gilt für $|\bar{0}\rangle_B$:

$$T_3 |\bar{0}\rangle_B = z^3 |\bar{0}\rangle_B \;; \quad \vec{T}^2 |\bar{0}\rangle_B = z^3(z^3+1)\,|\bar{0}\rangle_B \tag{III,45}$$

Diese beiden Zustände sind zwei von $2Z^3+1$ entarteten Zuständen, die alle die Energie Null haben. Sie bilden ein Isospinmultiplett mit $T = Z^3$, $T_3 = -Z^3, -Z^3 + 1, \ldots\ldots, 0, \ldots\ldots, Z^3$. Ihre Teilchenzahlen in der B-Darstellung sind gemäß (III,25) $0,2,4,\ldots\ldots, 4Z^3$. Der Zustand mit Teilchenzahl Null ist natürlich $|0\rangle_B$, entsprechend der mit Teilchenzahl $4Z^3$ $\overline{|0\rangle_B}$. Die anderen Zustände des Multipletts konstruieren wir mit Hilfe des Aufsteigeoperators für den Isospin:

$$\overline{T}_+ = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{\vec{n}} \psi_D^+(\vec{n}) (\beta_1 + i\beta_2) \psi_D(\vec{n}) \qquad \text{(III,46)}$$

In der B-Darstellung hat er die Gestalt:

$$\overline{T}_+ = \frac{-i}{2\sqrt{2}} \sum_{\vec{n}} \psi_B^+(\vec{n}) \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2^P \\ \sigma_2^P & 0 \end{pmatrix} \psi_B^{\#}(\vec{n}) \qquad \text{(III,47)}$$

Die Absteigeoperatoren erhält man mit $\overline{T} = (\overline{T}_+)^+$. Mit (III,47) können wir nun das gesamte Multiplett konstruieren. Es besteht aus den Zuständen:

$$|Z^3, m\rangle = (\overline{T}_+)^m |0\rangle_B = \left(\frac{-i}{2\sqrt{2}} \sum_{\vec{n}} \psi_B^+(\vec{n}) \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2^P \\ \sigma_2^P & 0 \end{pmatrix} \psi_B^{\#}(\vec{n}) \right)^m |0\rangle_B \qquad \text{(III,48)}$$

Da T_+ mit dem gesamten Hamiltonoperator vertauscht, sind alle Zustände $|Z^3, m\rangle$ exakte Eigenzustände von H zur Energie Null.
Die Isospininvarianz des Operators $H_{Bew} + H_W^A$ ermöglicht noch eine Aussage über die Teilchenzahl des absoluten Grundzustandes in der B-Darstellung. Wir beschränken uns zunächst darauf, daß die Teilchenzahl des Grundzustandes gerade sei. Ein Zustand mit $2Z^3 + 2n$ (n ganz) Teilchen hat den Isospin $T_3 = n$. Durch Anwendung von $(T_-)^n$ erhalten wir daraus einen dazu entarteten Zustand mit Teilchenzahl $2Z^3$. Wegen $T_3 = n$ kann die Anwendung von $(T_-)^n$ übrigens nicht Null ergeben. Die Energie des Grundzustandes des $2Z^3 + 2n$ Teilchenproblems ist also nicht niedriger als die des $2Z^3$ Teilchenproblems. Bei gerader Teilchenzahl hat der Grundzustand des $2Z^3$ Teilchenproblems die Energie des absoluten Grundzustandes für alle geraden Teilchenzahlen. Genauso können wir folgern, daß für ungerade Teilchenzahlen die Grundzustände des

$(2Z^3+1)$ bzw. $(2Z^3-1)$ Teilchenproblems, die übrigens zu einander entartet sind, die Energie des absoluten Grundzustandes für ungerade Teilchenzahlen haben. Für gerade Teilchenzahlen ist damit die Bedeutung der Teilchenzahl $2Z^3$ (in der B-Darstellung) klar, da die Zustände mit sämtlichen anderen geraden Teilchenzahlen entartet zu speziellen $2Z^3$ Teilchenzuständen sind und die Zustände mit $2Z^3$ Teilchen somit schon alle Ergebnisse liefern. Wenn der absolute Grundzustand T =0 hat, so hat er die B-Teilchenzahl $2Z^3$, ist sein Isospin ungleich Null, so ist er in der B-Darstellung in der Teilchenzahl entartet, enthält jedoch immer Zustände mit $2Z^{3*}$ oder $2Z^3+1^{**}$ bzw. $2Z^3-1^{**}$ Teilchen.
Wir transformieren nun noch den Hamiltonoperator mit der B-Wechselwirkung in die D-Darstellung. Er hat dann die Form:

$$H = \sum_{\vec{n}} \psi_D^+(\vec{n})\,\vec{\kappa}\vec{\sigma}\,\psi_D(\vec{n}) + W\cdot\sum_{\vec{n}}\Big\{-\psi_D^+(\vec{n})\sigma_2\vec{\rho}\rho_2\psi_D^{\#}(\vec{n})\,\psi_D^T(\vec{n})\,\rho_2\vec{\rho}\sigma_2\psi_D(\vec{n}) -$$

$$-\psi_D^+(\vec{n})\,\rho_1\sigma_2\psi_D^{\#}(\vec{n})\,\psi_D^T(\vec{n})\,\rho_1\sigma_2\psi_D(\vec{n}) + \delta\,\psi_D^+(\vec{n})\psi_D(\vec{n}) - \delta\Big\} \qquad \text{(III,49)}$$

Der Term $\psi_D^+(\vec{n})\,\rho_1\sigma_2\psi_D^{\#}(\vec{n})\;\psi_D^T(\vec{n})\,\rho_1\sigma_2\,\psi_D(\vec{n})$ bricht die Isospinsymmetrie bis auf die T_3 erzeugten Transformationen, die in der B-Darstellung den Phasentransformationen entsprechen. Diese Symmetriebrechung verschafft uns einen weiteren lokalen Grundzustand, wie man aus dem lokalen Punktspektrum erfährt. Das lokale Punktspektrum von H_W^B hat in der D-Darstellung folgendes Aussehen: (Die Zustände $|\beta\rangle_{0_i}$ sind gemäß (III,20) definiert)

x) von

*) T ganzzahlig **) T halbzahlig

Zustand	Energie	T	T_3	S	S_3
$\|0\rangle_D$	$-8W$	0	0	0	0
$\frac{1}{\sqrt{2}} \psi_D^+(\vec{n}) \rho_1 \sigma_2 \psi_D^{\#}(\vec{n}) \|0\rangle_D$	$-8W$	1	0	0	0
$\|4\rangle_D$	$-8W$	0	0	0	0
$\psi_{D1}^+(\vec{n}) \|0\rangle_D$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\psi_{D2}^+(\vec{n}) \|0\rangle_D$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\psi_{D3}^+(\vec{n}) \|0\rangle_D$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\psi_{D4}^+(\vec{n}) \|0\rangle_D$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\|3\rangle_{D1}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\|3\rangle_{D2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\|3\rangle_{D3}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\|3\rangle_{D4}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4} \psi_D^+(\vec{n}) (\rho_0+\rho_3) \sigma_2 \psi_D^{\#}(\vec{n}) \|0\rangle_D$	0	1	1	0	0
$\frac{1}{4} \psi_D^+(\vec{n}) (\rho_0-\rho_3) \sigma_2 \psi_D^{\#}(\vec{n}) \|0\rangle_D$	0	1	-1	0	0
$\frac{1}{4} \psi_D^+(\vec{n}) \rho_2 (\sigma_0+\sigma_3) \psi_D^{\#}(\vec{n}) \|0\rangle_D$	$8W$	0	0	1	1
$\frac{1}{\sqrt{2}} \psi_D^+(\vec{n}) \rho_2 \sigma_1 \psi_D^{\#}(\vec{n}) \|0\rangle_D$	$8W$	0	0	1	0
$\frac{1}{4} \psi_D^+(\vec{n}) \rho_2 (\sigma_0-\sigma_3) \psi_D^{\#}(\vec{n}) \|0\rangle_D$	$8W$	0	0	1	-1

Wir haben für diese Wechselwirkung ebenfalls die exakten Eigenzustände $|0\rangle_D$ und $|\overline{0}\rangle_D$, die diesmal jedoch den Eigenwert $-8WZ^3$ haben. Man rechnet auch leicht nach, daß die Zustände $|\xi_m\rangle$ von (III,42) im Falle der B-Wechseleinwirkung ebenfalls exakte Eigenzustände des gesamten Hamiltonoperators sind. Hinsichtlich ihrer Energie ergibt sich jedoch ein Unterschied zu (III,43). Es gilt:

$$(H_{Bew} + H_W^B)\,|\xi_m\rangle = (-8WZ^3 + 16m\cdot W)\cdot|\xi_m\rangle \qquad \text{(III,51)}$$

Im Gegensatz zu der A-Wechselwirkung können wir bei der B-Wechselwirkung nicht nur zwei exakte Eigenzustände des gesamten Hamiltonoperators mit der Energie $-8WZ^3$ angeben, sondern ein ganzes Spektrum von Eigenzuständen mit ganzzahligen Helizitäten von $-Z^3$ bis $+Z^3$. Die Konstruktion dieser Zustände ist einfach. Wir gehen aus vom Zustand $|0\rangle_D$ mit der Helizität $-Z^3$. Die Gruppe der $\bar{R}_i$ Transformationen (I,11) ist eine Invarianzgruppe des gesamten Hamiltonoperators. Sie enthält mit $\bar{R}_3$ die Helizität. Die Operatoren

$$R_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\bar{R}_1 + i\bar{R}_2) \quad \text{und} \quad R_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\bar{R}_1 - i\bar{R}_2) \qquad \text{(III,52)}$$

sind Aufsteige- und Absteigeoperatoren für die Helizität. Wir bemerken noch, daß in der B-Darstellung die $\bar{R}_i$ wie folgt aussehen:

$$\bar{R}_3^B = \sum_{\vec{n}} \psi_B^+(\vec{n})\,\rho_1^B\,\psi_B(\vec{n}) \quad ; \quad \bar{R}_1^B = \sum_{\vec{n}} -e^{i\pi\vec{n}\vec{\alpha}}\,\psi_B^+(\vec{n})\,\rho_3^B\,\psi_B(\vec{n}) \quad ;$$

$$\bar{R}_2^B = \sum_{\vec{n}} e^{i\pi\vec{n}\vec{\alpha}}\,\psi_B^+(\vec{n})\,\rho_2^B\,\psi_B(\vec{n}) \quad ; \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(III,53)}$$

In der D-Darstellung haben die $\bar{R}_i$ die Gestalt:

$$\bar{R}_3^D = \sum_{\vec{n}} \psi_D^+(\vec{n})\,\psi_D(\vec{n}) \quad ; \quad \bar{R}_1^D = -\sum \tfrac{1}{2}\{\psi_D^+(\vec{n})\,\rho_3\sigma_2\,\psi_D^{\#}(\vec{n}) + \psi_D^T(\vec{n})\,\rho_3\sigma_2\,\psi_D(\vec{n})\}\cdot$$
$$\cdot\, e^{i\pi\vec{n}\vec{\alpha}}$$

$$\bar{R}_2^D = \sum_{\vec{n}} \tfrac{1}{2}\{i\,\psi_D^+(\vec{n})\,\rho_3\sigma_2\,\psi_D^{\#}(\vec{n}) - i\,\psi_D^T(\vec{n})\,\rho_3\sigma_2\,\psi_D(\vec{n})\}\,e^{i\pi\vec{n}\vec{\alpha}} \qquad \text{(III,54)}$$

Der Aufsteigeoperator wird in der D-Darstellung:

$$\bar{R}_+^D = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{\vec{n}} \gamma_D^+(\vec{n})\, \rho_1\sigma_2\, \gamma_D^{\#}(\vec{n})\, e^{i\pi\vec{n}\vec{\alpha}} \qquad \text{(III,55)}$$

Die Zustände $|G_m\rangle = (\bar{R}_+^D)^m |0\rangle_D$ sind also alle exakte Eigenzustände zum Gesamthamiltonoperator. Sie haben in der B-Darstellung alle Teilchenzahl $2Z^3$, ihre Energie ist immer $-8\pi Z^3$ und ihre Helizitäten sind gleich $-Z^3+m$ ($m \leq 2Z^3$).

Die Diracgleichung für freie Fermionen mit Masse m lautet in der B-Darstellung:

$$i|\dot{\varphi}\rangle_B = \Big(\sum_{\vec{n}} \gamma_B^+(\vec{n})\, \rho_1^{\beta}\, \vec{\sigma}^{\beta}\, \vec{\nabla}\, \gamma_B(\vec{n}) + m\, \gamma_B^+(\vec{n})\, \rho_3^{\beta}\, \gamma_B(\vec{n}) \Big) |\varphi\rangle_B \qquad \text{(III,56)}$$

Daraus wird in der D-Darstellung:

$$i|\dot{\varphi}\rangle_D = \Big\{ \sum_{\vec{n}} \gamma_D^+(\vec{n})\, \vec{\nabla}\vec{\sigma}\, \gamma_D(\vec{n}) + \frac{1}{2} m \left(\gamma_D^+(\vec{n})\, \rho_1\sigma_2\, \gamma_D^{\#}(\vec{n}) + \gamma_D^T(-\vec{n})\, \rho_1\sigma_2\, \gamma(\vec{n}) \right) \Big\} |\varphi\rangle_D$$

oder im Ortsraum:

$$i|\dot{\varphi}\rangle_D = \Big\{ -\frac{i\sqrt{2}}{2L} \sum_{\vec{n},i} \gamma_D^+(\vec{n})\, \sigma_i \left(\gamma_D(\vec{n}+\vec{e}_i) - \gamma_D(\vec{n}-\vec{e}_i) \right) + \frac{1}{2} m \sum_{\vec{n}} \left(\gamma_D^+(\vec{n})\, \rho_1\sigma_2\, \gamma_D^{\#}(\vec{n}) + \gamma_D^T(\vec{n})\, \rho_1\sigma_2\, \gamma(\vec{n}) \right) \Big\} |\varphi\rangle_D \qquad \text{(III,57)}$$

Die Form (III,57) war zu erraten, da man in einer (1/2, 0) Darstellung mit $\gamma_D^+(\vec{n})\, A\, \gamma_D(\vec{n})$ nur eine (1/2, 1/2) Darstellung, also einen Vierervektor erhalten kann. Einen Skalar erhält man jedoch mit $\gamma_D^T(\vec{n})\, \sigma_2\, \gamma_D(\vec{n})$ die (1,0) Darstellung reduziert man mit $\gamma_D^T(\vec{n})\, \rho_2\vec{\sigma}\sigma_2\, \gamma_D(\vec{n})$ aus. Der Massenterm in (III,57) bricht nicht nur die Teilchenzahlerhaltung, sondern auch die Isospinsymmetrie bis auf die von T_3 erzeugten Transformationen. Der Grundzustand von (III,57) ist deswegen eine Linearkombination von Zuständen mit T = 0, 1,..., Z^3.

Die Energie der hohen Isospins liegt aber in der Nähe von Null, da ein Zustand mit T = Z^3 -n zu einem Zustand mit 2n Teilchen entartet ist. Für die Grundzustandsapproximation $|\varphi\rangle_{(I)}$ von (II,13) gilt in der

B-Darstellung:

$$\Big(\sum_{\vec{k}} \psi_B^+(\vec{k})\, \beta_1^B \vec{k}\vec{\sigma}^B \psi_B(\vec{k}) - m\, \psi_B^+(\vec{k}-\vec{v}_i)\, \beta_1^B \psi_B(\vec{k}) \Big) |\varphi\rangle_{(II)}^B =$$

$$= \Big(-2 \sum_{\vec{k}} \sqrt{\vec{k}^2+m^2}\ \Big) |\varphi\rangle_{(I)}^B \qquad \text{(III,58)}$$

Die Diracgleichung (III,58) sieht in der D-Darstellung folgendermaßen aus:

$$\Big(\sum_{\vec{k}} \psi_D^+(\vec{k})\, \vec{k}\vec{\sigma}\, \psi_D(\vec{k}) - m\, \psi_D^+(\vec{k}-\vec{v}_i)\, \psi_D(\vec{k}) \Big) |\varphi\rangle_{(I)}^D =$$

$$\Big(-2 \sum_{\vec{k}} \sqrt{\vec{k}^2+m^2}\ \Big) |\varphi\rangle_{(I)}^D \qquad \text{(III,59)}$$

Der Diracoperator von (III,59) hat im Ortsraum die Gestalt:

$$\Big\{ -\frac{i\sqrt{2}}{2L} \sum_{\vec{n},i} \psi_D^+(\vec{n})\, \sigma_i \big(\psi_D(\vec{n}+\vec{e}_i) - \psi_D(\vec{n}-\vec{e}_i)\big) - m e^{i\pi \vec{n}\vec{\alpha}}\, \psi^+(\vec{n})\psi(\vec{n}) \Big\} \qquad \text{(III,60)}$$

Der wesentliche Vorteil der Diracgleichung (III,60) liegt darin, daß sie die Teilchenzahl der D-Darstellung erhält (in der B-Darstellung also $\gamma_5 = \beta_1^B$ invariant ist) und die volle Isospininvarianz besitzt. Der Zustand $|\varphi\rangle_{(I)}^D$ ist deswegen Eigenzustand zu T_3 und $\vec{T}^2$ mit

$$T_3 |\varphi\rangle_{(I)}^D = \vec{T}^2 |\varphi\rangle_{(II)}^D = 0 \qquad \text{(III,61)}$$

Er enthält deswegen keine Anteile, die zu Zuständen mit anderer Teilchenzahl (B-Darstellung) als $2Z^3$ entartet sind. Dies ist ebenfalls ein Grund dafür, daß die Energie von $|\varphi\rangle_{(I)}^D$ viel tiefer als die des Hartree-Fock Zustandes liegt. Die physikalische Interpretation von (III,60) erfordert übrigens einige Vorsicht, da sie gegenüber den Lorentztransformationen (III,23) nicht invariant ist. Ihre Eigenzustände können deswegen nicht ohne weiteres als Fermionen mit Masse m aufgefaßt werden, da sie sich bei Anwendung von (III,23) nicht wie solche transformieren. Es ist natürlich möglich, die Lorentztransformationen so zu definieren, daß sie (III,60) invariant lassen, jedoch ist dann der Wechselwirkungsoperator nicht mehr lorentzinvariant, wie man in der II-Darstellung sieht. Wir bleiben deshalb bei den Lorentztransformationen gemäß (III,22) bzw.

(III,23) und betrachten den Diracoperator (III,20) mehr als ein mathematisches Hilfsmittel, das deswegen sehr günstig ist, da dieser Operator eben die algebraische Struktur eines Diracoperators hat.
Die D-Darstellung bietet noch weitere Vorteile. Es wird sich zeigen, daß man, von dieser Darstellung ausgehend, relativ leicht für große W eine untere Schranke der Energie des exakten Grundzustandes angeben kann. Diese Abschätzung wird die Qualität der Grundzustandsapproximation $|\Phi\rangle_{(I)}$ bestätigen.

IV. Abschätzung der Grundzustandsenergie für große W

Wir rechnen in diesem Abschnitt nur mit der A-Wechselwirkung, wo H_W vorkommt, ist also H_W^A gemeint. Als Darstellung benutzen wir, wo es nicht ausdrücklich anders gesagt ist, die D-Darstellung. $\psi(\vec{n})$ bedeutet immer $\psi_D(\vec{n})$. Um Aussagen über den Grundzustand zu erhalten werden wir im Sinne der umgekehrten Störungsrechnung vorgehen, indem wir als Ausgangspunkt die Grundzustände von H_N nehmen und überlegen, was wir bei Abänderung dieser Zustände in einer bestimmten Ordnung an maximaler Energieabsenkung erhalten können. Der Grundzustand von H_N ist 2^{2^3} - fach entartet. Wir bezeichnen diese Zustände folgendermaßen:

$$|\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M\rangle =$$

$$= \prod_{\nu=1,\dots,M} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi^+(\vec{n}_\nu)\beta_1\sigma_2\psi^+(\vec{n}_\nu)\right)^2|0\rangle \qquad M = 0,1,2,\dots Z^3 \qquad \text{(IV,1)}$$

$M = 0$ entspricht dem Zustand $|0\rangle$, der exakter Eigenzustand von H ist
$M = Z^3$ entspricht dem Zustand $|\overline{0}\rangle$, der exakter Eigenzustand von H ist

Alle anderen Zustände $|\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M\rangle$ sind zwar exakte Eigenzustände von H_W, aber nicht von $H_{Bew} + H_W$. Es gilt jedoch für alle Zustände

$$|\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_M\rangle \quad : \quad \langle\vec{n}'_1,\dots,\vec{n}'_M|\,H_{Bew}\,|\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_M\rangle = 0 \qquad \text{(IV,2)}$$

und $\langle\vec{n}'_1,\dots,\vec{n}'_{M'}|H^2_{Bew}|\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M\rangle = 0$

für $|\vec{n}'_1,\dots,\vec{n}'_{M'}\rangle \neq |\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M\rangle$ (IV,3)

Wegen (IV,2) liefert die umgekehrte Störungsrechnung erster Ordnung nichts. (IV,3) hat zur Folge, daß die Störungsrechnung zweiter Ordnung in dem Sinne zerfällt, daß wir nicht einen Zustand der Form

$$|\varphi\rangle = \sum_{M;\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M} \Big\{ a_{\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_M}|\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M\rangle + b_{\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_M} H_{Bew}|\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M\rangle \Big\} \qquad \text{(IV,4)}$$

ansetzen müssen, um zu größtmöglicher Absenkung zu gelangen, sondern daß wir die maximale Energieabsenkung bereits mit einem Zustand der

Art: $|\varphi'\rangle = a|\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M\rangle + b\cdot H_{Bew}|\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M\rangle$ (IV,5)

erreichen können. Die Absenkung, die wir dadurch bekommen, ist proportional zu $|\langle\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M|H^2_{Bew}|\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M\rangle|^{\frac{1}{2}}$. Zu diesem Ausdruck liefern nur diejenigen Anteile von H_{Bew} einen Beitrag, bei denen ein Vernichtungsoperator auf eine der vierfach besetzten Stellen $\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M$ fällt und ein Erzeugungsoperator auf die restlichen leeren Stellen. Da alle nichtverschwindenden Summenglieder von $H_{Bew}|\vec{n}_1\dots\vec{n}_M\rangle$ zu einander orthogonal sind, können wir leicht die folgende Abschätzung angeben:

$$|\langle\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_M|H^2_{Bew}|\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M\rangle|^{\frac{1}{2}} \leq \alpha\,\frac{\sqrt{Z}}{L}\sqrt{\min(M, Z^3-M)} \qquad (IV,6)$$

Dabei ist α von Z und M unabhängig. Wir setzen nun einen Zustand der Form (IV,5) an und bestimmen unter der Nebenbedingung, daß $\langle\varphi|\varphi\rangle = 1$ ist, a, b und $\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_M$ so, daß $\langle\varphi|H|\varphi\rangle$ minimal wird. Gegen (IV,6) sollte $M = \frac{1}{2}Z^3$ sein, damit wir eine maximale Absenkung bekommen. Es wird sich jedoch herausstellen, daß von den vielen Zuständen mit $M = \frac{1}{2}Z^3$ nur ganz bestimmte eine Absenkung $\sim \frac{Z^2}{L}$ liefern. Untersuchen wir zunächst:

$$\langle\varphi|H_{Bew}|\varphi\rangle = aa^*\underbrace{\langle\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M|H_{Bew}|\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M\rangle}_{=0} +$$

$$+ b^*b\langle\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_M|H^3_{Bew}|\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_M\rangle +$$

$$+ \left(a^*b\langle\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_M|H^2_{Bew}|\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M\rangle + c.c.\right) \qquad (IV,7)$$

Wir nehmen nun die folgende unitäre Transformation vor:

$$\varphi(\vec{n}) = \varphi'(\vec{n}) \qquad \text{für} \quad \vec{n} \notin \{\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M\}$$

$$\varphi(\vec{n}) = \beta_1\sigma_2\varphi^{*1}(\vec{n}) \qquad \text{für} \quad \vec{n} \in \{\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M\} \qquad (IV,8)$$

Diese Transformation führt $|\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_M\rangle$ in das neue Vakuum $|0\rangle'$ über. Der Wechselwirkungsoperator bleibt bei (IV,8) invariant. Der Bewegungsoperator transformiert sich jedoch nicht ganz einheitlich. Er hat in der neuen Darstellung die Gestalt: $H'_{Bew} =$

$$= \frac{i\sqrt{z}}{2l}\Big\{\sum_{i=1}^{3}\Big(\sum_{\vec{n}}\ \underset{\vec{n}\notin\{\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M\}\ \wedge\ \vec{n}-\vec{e}_i\in\{\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M\}}{\varphi^{+\prime}(\vec{n})\sigma_i\varphi'(\vec{n}-\vec{e}_i)} + \sum_{\vec{n}'}\ \underset{\vec{n}'\in\{\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M\}\ \wedge\ \vec{n}'-\vec{e}_i\in\{\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M\}}{\varphi^{+\prime}(\vec{n}'-\vec{e}_i)\sigma_i\varphi'(\vec{n}')} +$$

$$+\sum_{\vec{n}''}\ \underset{\vec{n}''\notin\{\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M\}\ \wedge\ \vec{n}''-\vec{e}_i\in\{\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M\}}{\varphi^{+\prime}(\vec{n}'')\beta_1\sigma_i\sigma_2\varphi^{*\prime}(\vec{n}''-\vec{e}_i)} + \sum_{\vec{n}'''}\ \underset{\vec{n}'''\in\{\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M\}\ \wedge\ \vec{n}'''-\vec{e}_i\notin\{\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_M\}}{\varphi'^{T}(\vec{n}''')\beta_1\sigma_2\sigma_i\varphi'(\vec{n}'''-\vec{e}_i)}\Big)\Big\} +$$

$$+ \text{H.C.} \qquad \text{(IV,9)}$$

Der Testzustand $|\varphi\rangle$ geht bei der Transformation (IV,8) in den folgenden Zustand über:

$$|\varphi\rangle' = a\cdot|0\rangle' + b\,H'_{Bew}|0\rangle' \qquad \text{(IV,10)}$$

Zu dem Vektor $b\,H'_{Bew}|0\rangle'$ tragen alle Anteile von H'_{Bew}, bei denen rechts ein Vernichtungsoperator steht, nicht bei, insbesondere also die ersten beiden Summen von (IV,9). Mit (IV,9) erhält man für $|\varphi\rangle'$:

$$|\varphi\rangle' = a\cdot|0\rangle' + b\cdot\frac{i\sqrt{z}}{2l}\Big(\sum_{i=1}^{3}\Big\{\sum_{\vec{n}}\ \underset{\vec{n}\in\{\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M\}\ \wedge\ \vec{n}-\vec{e}_i\notin\{\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_M\}}{\varphi'^{+}(\vec{n})\beta_1\sigma_i\sigma_2\varphi'^{*}(\vec{n}-\vec{e}_i)}\Big\}\Big)|0\rangle'$$

$$\vee\ \vec{n}\notin\{\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M\}\ \wedge\ \vec{n}-\vec{e}_i\in\{\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_M\} \qquad \text{(IV,11)}$$

Wir suchen nun die günstigste Wahl für $|\vec{n}_1,\ldots\vec{n}_M\rangle$. Dabei können wir den Anteil $b^*b\langle\vec{n}_1,\ldots\vec{n}_M|H^3_{Bew}|\vec{n}_1,\ldots\vec{n}_M\rangle$ von (IV,7) vernachlässigen, da er in der neuen Darstellung einem Ausdruck der Form $'\langle\varphi|H'_{Bew}|\varphi\rangle'$ entspricht, mit $'\langle\varphi|\varphi\rangle'\leq 1$ und $|\varphi\rangle' = \sum_{i,\kappa,\vec{n}_1,\vec{n}_2} a_{i\kappa}(\vec{n}_1,\vec{n}_2)\,\varphi'^{+}_{i}(\vec{n}_1)\,\varphi'^{+}_{\kappa}(\vec{n}_2)\,|0\rangle'$. Von $'\langle\varphi|H'_{Bew}|\varphi\rangle'$ geben, da $|\varphi\rangle'$ die scharfe Teilchenzahl 2 hat, nur die Summanden von H'_{Bew} einen Beitrag, die aus den ersten beiden Summen von (IV,9) stammen, also die ursprüngliche Form des Bewegungsoperators haben.

$'\langle\varphi|H'_{Bew}|\varphi\rangle'$ ergibt also maximal $2\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{2}}{L}$, was der maximalen Bewegungsenergie eines Zweiteilchenzustandes entspricht.

$b^*b\langle\vec{n}_1,\ldots\vec{n}_M|H^3_{Bew}|\vec{n}_1,\ldots\vec{n}_M\rangle$ ergibt also nur einen Beitrag $\sim\frac{\sqrt{2}}{L}$, der gegenüber dem viel größeren Anteil, den wir von $a^*b\langle\vec{n}_1,\ldots\vec{n}_M|H^2_{Bew}|\vec{n}_1,\ldots\vec{n}_M\rangle$ erhalten können, keine Rolle spielt. Wenn wir für $b=b_1\cdot\langle\vec{n}_1,\ldots,\vec{n}_M|H^2_{Bew}|\vec{n}_1,\ldots\vec{n}_M\rangle^{-\frac{1}{2}}$ setzen, so gilt bis auf einen Term $\sim\frac{\sqrt{2}}{L}$: $\langle\varphi|H_{Bew}|\varphi\rangle =$

$$= 2\cdot Re\,a^*b_1\,\langle\vec{n}_1,\ldots,\vec{n}_M|H^2_{Bew}|\vec{n}_1,\ldots,\vec{n}_M\rangle^{\frac{1}{2}}$$

$$|a|^2+|b|^2=1 \qquad \text{(IV,12)}$$

$$(\langle\vec{n}_1,\ldots\vec{n}_M|H_{Bew}|\vec{n}_1,\ldots,\vec{n}_M\rangle = 0\ )$$

Mit (IV,11) erhalten wir:

$$\langle\varphi|H_{Bew}|\varphi\rangle =$$

$$= 2\cdot Re\,a^*b_1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2L}\cdot\langle 0|\Big\{\sum_{i=1}^{3}\Big(\sum_{\vec{n}'}\varphi'^{T}(\vec{n}'-\vec{e}_i)\,\beta_1\sigma_2\sigma_i\,\varphi'(\vec{n}')\Big)\Big\}\cdot$$

$$\cdot\Big\{\sum_{i=1}^{3}\Big(\sum_{\vec{n}'}\varphi'^{+}(\vec{n}')\,\beta_1\sigma_i\sigma_2\,\varphi'^{*}(\vec{n}'-\vec{e}_i)\Big)\Big\}\cdot|0\rangle'^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(IV,13)}$$

Dabei wird nur über solche $\vec{n}'$ summiert, für die gilt:

$$\vec{n}'\in\{\vec{n}_1,\ldots,\vec{n}_M\} \text{ und } \vec{n}'-\vec{e}_i\notin\{\vec{n}_1,\ldots,\vec{n}_M\}$$

oder

$$\vec{n}'\notin\{\vec{n}_1,\ldots,\vec{n}_M\} \text{ und } \vec{n}'-\vec{e}_i\in\{\vec{n}_1,\ldots,\vec{n}_M\} \qquad \text{(IV,13a)}$$

Aus (IV,13) folgt, daß wir eine maximale Absenkung dann erhalten, wenn in (IV,9) die ersten beiden Summen gar nicht mehr auftreten, und H'_{Bew} nur noch aus Termen besteht, die den letzten beiden Summen in (IV,9)

entsprechen. Wir müssen also $|\vec{n}_1,\ldots,\vec{n}_M\rangle$ so wählen, daß gilt:

aus $\vec{n}\in\{\vec{n}_1,\ldots,\vec{n}_M\}$ folgt $\vec{n}+\vec{e}_i\notin\{\vec{n}_1,\ldots,\vec{n}_M\}$ und

aus $\vec{n}\notin\{\vec{n}_1,\ldots,\vec{n}_M\}$ folgt $\vec{n}+\vec{e}_i\in\{\vec{n}_1,\ldots,\vec{n}_m\}$ (IV,14)

Es genügt also nicht, nur $M\sim Z^3$ zu wählen, sondern man muß auch darauf achten, daß die vierfach besetzten Stellen keine "Klumpen" bilden. Es gibt genau einen Zustand, der diese Eigenschaft hat, nämlich der folgende:

$$|G_0\rangle=\prod_{\vec{n}}\left(\tfrac{1}{2}(1+e^{i\pi\vec{n}\vec{\alpha}})+\tfrac{1}{2}(1-e^{i\pi\vec{n}\vec{\alpha}})\cdot\tfrac{1}{\beta}(\psi^{+}(\vec{n})\rho_1\sigma_2\psi^{+T}(\vec{n}))^2\right)\cdot|0\rangle$$

$$\vec{\alpha}^T=(1,1,1) \qquad \text{(IV,15)}$$

Wir transformieren $|G_0\rangle$ auf einen Vakuumzustand vermittels:

$$\psi(\vec{n})=\tfrac{1}{2}(1+e^{i\pi\vec{n}\vec{\alpha}})\psi'(\vec{n})+\tfrac{1}{2}(1-e^{i\pi\vec{n}\vec{\alpha}})\rho_1\sigma_2\psi'^{+}(\vec{n}) \qquad \text{(IV,16)}$$

(IV,16) entspricht der Transformation (IV,8). Mit (IV,16) transformiert sich der Bewegungsoperator folgendermaßen:

$$H'_{Bew}=-\frac{i\sqrt{2}}{2\iota}\sum_{\vec{n},i}\left(\psi'^{+}(\vec{n})\sigma_i\rho_1\sigma_2\psi'^{+T}(\vec{n}+\vec{e}_i)-\psi'^{T}(\vec{n}+\vec{e}_i)\rho_1\sigma_2\sigma_i\psi'(\vec{n})\right) \qquad \text{(IV,17)}$$

oder in der Impulsdarstellung:

$$H'_{Bew}=\frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\left(\psi'^{+}(\vec{k})\vec{\sigma}\sigma_2\rho_1\psi'^{+T}(-\vec{k})+\psi'^{T}(-\vec{k})\sigma_2\vec{\sigma}\rho_1\psi'(\vec{k})\right)\vec{\kappa}$$

$$\kappa_i=\frac{\sqrt{2}}{\iota}\sin\frac{2\pi}{2}\cdot k_i \qquad \text{(IV,18)}$$

Wie schon erwähnt ändert sich dabei der Wechselwirkungsoperator nicht.

Wir konstruieren unseren Testzustand mit Hilfe von $|G_0\rangle$:

$$|\varphi_0\rangle = a\cdot|G_0\rangle + b_1 H_{Bew}|G_0\rangle\cdot\langle G_0|H_{Bew}^2|G_0\rangle^{-\frac{1}{2}} \quad ; \qquad |a|^2+|b_1|^2=1 \qquad \text{(IV,19)}\ ^{1)}$$

Für den Erwartungswert des Bewegungsoperators erhalten wir:

$$\langle\varphi_0|H_{Bew}|\varphi_0\rangle = {}'\langle\varphi_0|H'_{Bew}|\varphi_0\rangle' =$$

$$= 2\cdot Re\, a^* b_1 \frac{\sqrt{2}}{2L}\cdot{}'\langle 0|\Big(\sum_{\vec n,i}\varphi'^{T}(\vec n+\vec e_i)\rho_1\sigma_2\sigma_i\varphi'(\vec n)\Big)\cdot$$

$$\cdot\Big(\sum_{\vec n,i}\varphi'^{+}(\vec n)\rho_1\sigma_i\sigma_2\varphi'^{+}(\vec n+\vec e_i)\Big)\cdot|0\rangle'^{\frac{1}{2}} = 2\cdot Re\, a^* b_1\frac{\sqrt{2}}{L}\sqrt{3Z^3} \qquad \text{(IV,20)}$$

Für die gesamte Energie erhalten wir:

$$E = -4WZ^3 + 2Re\, a^* b_1\frac{\sqrt{2}}{L}\sqrt{3Z^3} + 12W b_1^* b_1 \qquad \text{(IV,21)}$$

Die minimale Energie entspricht der folgenden Parameterwahl:

$$b_1 = -\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{1-\frac{\frac{12Z^4}{L^2}}{(12W)^2+\frac{12Z^4}{L^2}}}} \qquad a=\sqrt{1-b_1^2} \qquad \text{(IV,22)}$$

Damit ist die minimale Energie

$$E_{min} = -4WZ^3 - \left(\frac{\frac{36Z^8}{L^4}}{(12W)^2+\frac{12Z^4}{L^2}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{(12W)^2}{(12W)^2+\frac{12Z^4}{L^2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\cdot 12W \qquad \text{(IV,23)}$$

1) Der Zustand $|\varphi_0\rangle$ hat den Isospin $T = T_3 = 0$ und damit in der B-Darstellung die Teilchenzahl $2Z^3$.

Wenn wir W gegenüber Z^2 vernachlässigen, ist die Absenkung gleich $-\frac{Z^2}{L}\sqrt{3}$ (Dieses Ergebnis erhalten auch F. Bopp und H. Maier-Bötzel bei der umgekehrten Störungsrechnung zweiter Ordnung, wenn eine Normkorrektur für den in erster Ordnung geänderten Zustand vorgenommen wird.[1]) Man überlegt sich leicht, daß $-\frac{Z^2}{L}\sqrt{3}$ der minimale Wert ist, den man für $\langle\psi|H_{Bew}|\psi\rangle$ mit $\langle\psi|\psi\rangle=1$ erhalten kann, wobei $|\psi\rangle$ ein Zustand ist, den man durch Abänderung irgendeines Zustandes $|\vec{u}_1,\dots\vec{u}_M\rangle$ bis zur ersten Ordnung und Linearkombination solcher Zustände erhält. Unter Abänderung eines Zustandes $|\Pi\rangle$ bis zur m-ten Ordnung verstehen wir den Ausdruck:

$$a_0|\Pi\rangle + \sum_{\vec{u}_1,\vec{u}_1',i_1,i_1'} a(\vec{u}_1,i_1;\vec{u}_1',i_1')\,\varphi^+_{i_1}(\vec{u}_1)\,\varphi_{i_1'}(\vec{u}_1')\,|\Pi\rangle + \dots\dots +$$

$$+ \sum_{\substack{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_m\\ \vec{u}_1',\dots,\vec{u}_m'\\ i_1,\dots,i_m\\ i_1',\dots,i_m'}} a(\vec{u}_1,i_1,\dots\vec{u}_m i_m;\vec{u}_1'i_1',\dots\vec{u}_m'i_m')\,\varphi^+_{i_1}(\vec{u}_1)\cdots\varphi^+_{i_m}(\vec{u}_m)\cdot$$

$$\cdot\,\varphi_{i_1'}(\vec{u}_1')\cdots\varphi_{i_m'}(\vec{u}_m')\cdot|\Pi\rangle$$

(IV,24)

Es ist nach dem Vorausgehenden klar, daß der Wert $-\frac{Z^2}{L}\sqrt{3}$ für den Erwartungswert des Bewegungsoperators bei Abänderung eines Zustandes $|\vec{u}_1,\dots\vec{u}_M\rangle$ bis zur ersten Ordnung nur erhalten werden kann, wenn wir $|G_0\rangle$ für $|\vec{u}_1,\dots\vec{u}_M\rangle$ nehmen. Vergleichbare Bewegungsenergien erhalten wir nur noch mit Zuständen, die sich wenig von $|G_0\rangle$ unterscheiden, während die Zustände, denen in der B-Darstellung die extremen Helizitäten entsprechen, also insbesondere $|0\rangle_D^{(B)}$ und $|\bar{0}\rangle_D^{(B)}$ mit den Helizitäten $-Z^3$ und Z^3 nur viel geringere Absenkungen liefern. Unter $|0\rangle_D^{(B)}$ verstehen wir die B-Darstellung des Vakuumzustandes $|0\rangle_D$ der D-Darstellung, entsprechend ist $|\bar{0}\rangle_D^{(B)}$ definiert. Die gleichen Werte wie für die Bewegungsenergien der in erster Ordnung geänderten Zustände erhalten wir auch für den Ausdruck $Min(-K|\Pi|H_{Bew}|\vec{u}_1,\dots\vec{u}_M\rangle|)$,

1) siehe l.c.VI

wobei $|\Pi\rangle$ ein beliebiger Vektor mit der Norm 1 ist. Der letztere Ausdruck stellt also ein Maß dafür dar, wieviel Bewegungsenergie in dem Zustand $|\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M\rangle$ enthalten ist, wenn wir die absoluten Beträge der in $|\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_M\rangle$ vorkommenden Bewegungsenergien nehmen. Insgesamt heben sich die positiven und negativen Anteile allerdings auf, so daß $\langle\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M|H_{Bew}|\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_M\rangle = 0$ gilt. Eine Zerlegung der Zustände $|\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M\rangle$ nach Eigenzuständen von H_{Bew} zeigt übrigens, daß $|\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_M\rangle$ Eigenzustände von H_{Bew} mit den Eigenwerten von $-\frac{\alpha\sqrt{z}}{\iota}\cdot M$ ($\alpha \sim Z^0$) bis $+\frac{\alpha\cdot\sqrt{z}}{\iota}$ enthält. Die Zustände $|\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M\rangle$, die in Bezug auf H_W äquivalent sind, haben also in Bezug auf H_{Bew}, insbesondere bei großen Unterschieden von M sehr verschiedene Eigenschaften.

Den Zuständen $|\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_M\rangle$ entsprechen wegen (II,26) in der B-Darstellung Zustände mit der Helizität $-Z^3 + 2M$. Insbesondere entsprechen Zuständen mit $M = 1/2\ Z^3$ in der B-Darstellung Zustände mit der Helizität Null. Bei der Abänderung in erster Ordnung haben wir die maximale Absenkung ausgehend vom Zustand $|G_0\rangle$ erreicht. $|G_0\rangle$ hat ebenfalls die Helizität Null. Die weiteren Rechnungen werden zeigen, daß man auch bei höheren Abänderungen die maximale Absenkung erhält, wenn man von $|G_0\rangle$ ausgeht. Die Abänderungsoperatoren (IV,24) ändern die Helizität $_B$ nicht, so daß auch bei höheren Abänderungen der Zustände $|\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_M\rangle$ die tiefsten Energien mit Zuständen der Helizität$_B$ Null erreicht werden. Wir können daraus schließen, daß die Helizität $_B$ des Grundzustandes in der Nähe von Null liegen wird. Daß die Helizität $_B$ des Grundzustandes nicht in der Nähe der extremen Helizitäten $_B$ $-Z^3$ und Z^3 liegt ist klar, da diesen Helizitäten $_B$ die D-Teilchenzahlen 0 und $4Z^3$ entsprechen. Im Grundzustand erwarten wir für $W \sim \frac{\sqrt{z}}{\iota}$ einen Beitrag der Bewegungsenergie $\sim \frac{\sqrt{z}^7}{\iota}$. Solche Beiträge erhalten wir aber erst mit einer D-Teilchenzahl $\sim Z^3$. Damit haben wir uns schon um einen Betrag $\sim Z^3$ von den extremen Helizitäten entfernt.

Nachdem wir die Energieabsenkung bei einer Abänderung eines Zustandes $|\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_M\rangle$ in erster Ordnung diskutiert haben, interessiert nun wie sich die Absenkung verhält, wenn wir in höherer Ordnung abändern. Wir setzen deshalb einen allgemeinen Zustand an, den wir durch Abänderung eines Zustandes $|\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M\rangle$ bis zur m-ten Ordnung konstruieren können. Wir transformieren diesen Zustand mit (IV,8), wobei $|\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_M\rangle$ in einen Vakuumzustand $|0\rangle'$ übergeführt wird. Er hat dann die fol-

gende Gestalt:

$$|\varphi^{(m)}\rangle' = a^0|0\rangle' + \sum_{\vec{n}_1,\vec{n}_1',i_1,i_1'} a^1(\vec{n}_1,i_1;\vec{n}_1',i_1')\,\varphi^{\prime+}_{i_1}(\vec{n}_1)\,\varphi^{\prime+}_{i_1'}(\vec{n}_1')\,|0\rangle' + \cdots +$$

$$\cdots + \sum_{\substack{\vec{n}_1,\ldots,\vec{n}_m\\ \vec{n}_1',\ldots,\vec{n}_m'\\ i_1,\ldots i_m\\ i_1',\ldots,i_m'}} a^m(\vec{n}_1,i_1,\ldots\vec{n}_m,i_m;\vec{n}_1',i_1',\ldots,\vec{n}_m',i_m')\,\varphi^{\prime+}_{i_1}(\vec{n}_1)\cdots\varphi^{\prime+}_{i_m}(\vec{n}_m)\cdot \varphi^{\prime+}_{i_1'}(\vec{n}_1')\cdots\varphi^{\prime+}_{i_m'}(\vec{n}_m')\cdot|0\rangle' \qquad \text{(IV,25)}$$

Ein allgemeiner Zustand $|\varphi^{(m)}\rangle'$ der Form (IV,25) ist übrigens noch allgemeiner als (IV,24), da er in der D-Darstellung nicht nur Terme enthält, die gleich viele Erzeugungsoperatoren und Vernichtungsoperatoren haben so wie (IV,24), sondern auch solche, bei denen das Verhältnis von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren völlig beliebig ist. Wir untersuchen nun $\langle\varphi^{(m)}|H'_{Bew}|\varphi^{(m)}\rangle'$. Die Form des transformierten Bewegungsoperators H'_{Bew} erhält man aus (IV,9). Sie hängt vom Zustand $|\vec{n}_1,\ldots,\vec{n}_m\rangle$, auf den die Abänderungsoperatoren angewendet werden, ab. Wir zerlegen H'_{Bew} nun so in zwei Anteile $H'_{Bew}(1)$ und $H'_{Bew}(2)$, daß $H'_{Bew}(1)$ der Anteil von H'_{Bew} ist, der die Summanden der Form $\varphi'(\vec{n})\,\sigma_i\,\varphi'(\vec{n}\pm\vec{e}_i)$ enthält und $H'_{Bew}(2)$ sich aus den Termen $\varphi'^{+}(\vec{n})\,\rho_1\sigma_i\sigma_2\,\varphi'^{+}(\vec{n}\pm\vec{e}_i)+\varphi^{T}(\vec{n})\,\rho_1\sigma_2\sigma_i\varphi'(\vec{n}\pm\vec{e}_i)$ zusammensetzt. $H'_{Bew}(1)$ und $H'_{Bew}(2)$ sind jeder für sich hermitesch. Für $H'_{Bew}(1)$ und $H'_{Bew}(2)$ gelten die beiden folgenden Ungleichungen:

$$\operatorname*{Max}_{|\chi\rangle}\left(|\langle\chi|H'^{(1)}_{Bew}|\chi\rangle|\right) \le \operatorname*{Max}_{|\chi\rangle}\left(|\langle\chi|-\frac{i\sqrt{2}}{2L}\sum_{\vec{n}(alle),i}\varphi'^{+}(\vec{n})\,\sigma_i\cdot \left\{\varphi'(\vec{n}+\vec{e}_i)-\varphi'(\vec{n}-\vec{e}_i)\right\}|\chi\rangle|\right) \qquad \text{(IV,26)}$$

$$\max_{|\chi_1\rangle}\left(|\langle\chi_1|H'^{(2)}_{Bew}|\chi_1\rangle|\right) \leq \max_{|\chi_1\rangle}\Big(|\langle\chi_1|-\frac{i\sqrt{7}}{2L}\sum_{(alle)\vec{n},i}\{\psi'^{+}(\vec{n})\sigma_i\sigma_2\beta_1\cdot$$

$$\cdot\psi'^{+T}(\vec{n}+\vec{e}_i)-\psi'^{T}(\vec{n}+\vec{e}_i)\beta_1\sigma_2\sigma_i\psi'(\vec{n})\}|\chi_1\rangle|\Big) \qquad (IV,27)$$

(Die eventuellen Nebenbedingungen, unter denen die Zustände $|\chi\rangle$ und $|\chi_1\rangle$ variiert werden, sind natürlich dieselben) Die Ungleichungen (IV,26) und (IV,27) sehen recht trivial aus, da auf den rechten Seiten der Ungleichungen die über den ganzen Raum vervollständigten Operatoren $H'^{(1)}_{Bew}$ und $H'^{(2)}_{Bew}$ stehen, mit denen man natürlich noch zusätzliche Bewegungsenergie erhalten kann. Trotzdem bedürfen die Ungleichungen eines Beweises, der im Anhang (C1) angegeben ist.

Mit (IV,26) ist der Beitrag von $H'^{(1)}_{Bew}$ zu $'\langle\varphi^{(m)}|H'_{Bew}|\varphi^{(m)}\rangle'$ leicht abzuschätzen, da wir für den Erwartungswert $'\langle\varphi^{(m)}|-\frac{i\sqrt{7}}{2L}\sum_{\vec{n},i(alle\,\vec{n})}\psi'^{+}(\vec{n})\cdot\sigma_i\cdot$ $\cdot\{\psi'(\vec{n}+\vec{e}_i)-\psi'(\vec{n}-\vec{e}_i)\}|\varphi^{(m)}\rangle'$ die folgende Abschätzung angeben können:

$$|'\langle\varphi^{(m)}|-\frac{i\sqrt{7}}{2L}\sum_{\vec{n}\,(alle),i}\psi'^{+}(\vec{n})\sigma_i\{\psi'(\vec{n}+\vec{e}_i)-\psi'(\vec{n}-\vec{e}_i)\}|\varphi^{(m)}\rangle'|\leq$$

$$\leq 2\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}{L}\cdot m \qquad (IV,28)$$

Die Abschätzung (IV,28) ist unmittelbar einleuchtend, da die größte in $|\varphi^{(m)}\rangle'$ vorkommende Teilchenzahl gleich 2m ist und $\frac{\sqrt{3}}{L}\cdot\sqrt{7}$ die größte Bewegungsenergie ist, die ein Teilchen besitzen kann. Mit (IV,26) erhalten wir:

$$|'\langle\varphi^{(m)}|H'^{(1)}_{Bew}|\varphi^{(m)}\rangle'|\leq 2\cdot\frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}{L}\cdot m \qquad (IV,29)$$

Die Abschätzung (I,29) ist für den Fall, daß die Anzahl der Summanden $\psi'^{+}(\vec{n})\sigma_i\psi'(\vec{n}\pm\vec{e}_i)$ in $H'^{(1)}_{Bew}$ wesentlich kleiner als $6Z^3$ ist, ziemlich großzügig. Insbesondere wenn die Anzahl m' der Summanden kleiner als m ist, ist die rechte Seite von (IV,29) viel zu groß. Sie ist in diesem Falle proportional zu m', wobei der Proprotionalitätsfaktor vermutlich ebenfalls $2\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}{L}$ ist. Dieser ist aber nicht so ohne weiteres herzuleiten, da die Abschätzung recht unübersichtlich ist. Man kann je-

doch leicht einen Faktor $\frac{12}{l}\sqrt{z}$ verifizieren.

Da $H'^{(1)}_{Bew}$ und $H'^{(2)}_{Bew}$ jeder für sich Teilchen-Loch-symmetrisch sind, kann man (IV,29) die folgende Form geben, die für $m > Z^3$ vorteilhaft ist.

$$|\langle \varphi^{(m)} | H'^{(1)}_{Bew} | \varphi^{(m)} \rangle'| \leq 2 \cdot \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{z}}{l} \cdot Min\,(m, Z^3) \qquad (IV,30)$$

Der Operator H'(2) unterscheidet sich in seiner Wirkungsweise wesentlich von $H'^{(1)}_{Bew}$. Während $H'^{(1)}_{Bew}$ gleiche Teilchenzahlen verbindet, hat $H'^{(2)}_{Bew}$ nicht verschwindende Übergangselemente nur zwischen Zuständen, deren Teilchenzahl um zwei differiert. Ein anderer wesentlicher Unterschied ist der, daß bei hinreichend großem m' die Erwartungswerte von $H'^{(1)}_{Bew}$ proportional zur Teilchenzahl sind, während $H'^{(2)}_{Bew}$, wie schon die umgekehrte Störungsrechnung mit m = 1 gezeigt hat (z.B. in (IV,20)) auch bei ganz kleinen Teilchenzahlen (z.B. Teilchenzahl zwei) schon Erwartungswerte $\sim \frac{z^2}{l}$ bringt. Der Grund dafür ist, daß bei der Anwendung von $H'^{(1)}_{Bew}$ auf einen Zustand mit nur wenigen Teilchen die meisten Summanden verschwinden und die nicht verschwindenden Anteile proportional zur Teilchenzahl sind. $H'^{(2)}_{Bew}$ besteht jedoch zur Hälfte aus Summanden der Form $\psi'^{+}(\vec{n})\,\sigma_i\sigma_2\beta_1\psi'^{+}(\vec{n}\pm\vec{e}_i)$, die überhaupt keine Vernichtungsanteile haben, so daß die Anwendung auf Zustände geringer Teilchenzahl eine Anzahl von nicht verschwindenden Anteilen ergibt, die proportional zur Anzahl der Summenglieder in $H'^{(2)}_{Bew}$ ist. Der Beitrag von $H'^{(2)}_{Bew}$ zur Bewegungsenergie ist:

$$-\frac{i\sqrt{z}}{2l}\,\langle \varphi^{(m)} | \sum_{\substack{\vec{n},i \\ \{\vec{n}+\vec{e}_i,\,\vec{n}\}\in\{\mathfrak{F}\}}} \psi'^{+}(\vec{n})\sigma_i\sigma_2\beta_1\psi'^{+}(\vec{n}+\vec{e}_i) | \varphi^{(m)}\rangle' + c.c. \qquad (IV,31)$$

Die Menge $\{\mathfrak{F}\}$, deren Elemente Paare $\{\vec{n}+\vec{e}_i, \vec{n}\}$ sind, ist durch (IV,9) bestimmt.

Wir zerlegen $|\varphi^{(m)}\rangle'$ nach Zuständen mit scharfer Teilchenzahl.

$$|\varphi^{(m)}\rangle' = a_0^{(m)}\,|0\rangle' + a_2^{(m)}\,|\varphi_2^{(m)}\rangle' + \cdots + a_{2m}^{(m)}\,|\varphi_{2m}^{(m)}\rangle'$$

$$'\langle\varphi_\mu^{(m)}\,|\,\varphi_{\mu'}^{(m)}\rangle' = \delta_{\mu\mu'} \quad ; \quad \sum_{\nu=0}^{m} a_{2\nu}^{*}\cdot a_{2\nu} = 1 \qquad \text{(IV,32)}$$

Aus (IV,31) wird dann:

$$-\frac{i\sqrt{2}}{2L}\sum_{\nu=0}^{m-1}{}'\langle\varphi_{2\nu+2}^{(m)}\,|\sum_{\substack{\vec n,i\\ \{\vec n+\vec e_i,\vec n\}\in\{\mathcal{F}\}}}\varphi'^{+}(\vec n)\,\sigma_i\sigma_2\rho_1\,\varphi'^{\#}(\vec n+\vec e_i)\,|\varphi_{2\nu}^{(m)}\rangle' a^{*(m)}_{2\nu+2}\;a^{(m)}_{2\nu} + \text{c.c.} \qquad \text{(IV,33)}$$

Wir versuchen nun einen Anteil $'\langle\varphi_{2\nu+2}^{(m)}\,|\sum_{\substack{\vec n,i\\ \{\vec n+\vec e_i,\vec n\}\in\{\mathcal{F}\}}}\varphi'^{+}(\vec n)\,\sigma_i\sigma_2\rho_1\varphi'^{\#}(\vec n+\vec e_i)\,|\varphi_{2\nu}^{(m)}\rangle'$ von (IV,33) abzuschätzen. Dazu verwenden wir eine Methode, die zwar eine sehr großzügige Abschätzung liefert, dafür aber die Wirkungsweise von $H'^{(2)}_{\text{Bew}}$ sehr deutlich erkennen läßt. Wir führen folgende Darstellung der Zustände $|\varphi_{2\nu}^{(m)}\rangle'$ und $|\varphi_{2\nu+2}^{(m)}\rangle'$ ein.

$$|\varphi_{2\nu}^{(m)}\rangle' = \sum a(\vec n_1,i_1,\dots,\vec n_\nu,i_\nu;\vec n_1',i_1',\dots\vec n_\nu',i_\nu')\cdot\varphi'^{+}_{i_1}(\vec n_1)\cdots\varphi'^{+}_{i_\nu}(\vec n_\nu)\cdot$$
$$\cdot\varphi'^{+}_{i_1'}(\vec n_1')\cdots\cdot\varphi'^{+}_{i_\nu'}(\vec n_\nu')\,|0\rangle'$$

$$|\varphi_{2\nu+2}^{(m)}\rangle' = \sum b(\vec n_1,i_1,\dots,\vec n_{\nu+1},i_{\nu+1};\vec n_1',i_1',\dots,\vec n_{\nu+1}',i_{\nu+1}')\cdot\varphi'^{+}_{i_1}(\vec n_1)\cdots\varphi'^{+}_{i_{\nu+1}}(\vec n_{\nu+1})\cdot$$
$$\cdot\varphi'^{+}_{i_1'}(\vec n_1')\cdots\varphi'^{+}_{i_{\nu+1}'}(\vec n_{\nu+1}')\cdot|0\rangle' \qquad \text{(IV,34)}$$

(Summation über zweifach vorkommende Indizes)

Nun kann ein Anteil $a(\vec n_1,i_1,\dots,\vec n_\nu',i_\nu')\cdot\varphi'^{+}_{i_1}(\vec n_1)\cdots\varphi'^{+}_{i_\nu}(\vec n_\nu)\,\varphi'^{+}_{i_1'}(\vec n_1')\cdots\varphi'^{+}_{i_\nu'}(\vec n_\nu')\,|0\rangle'$ [1] von $|\varphi_{2\nu}^{(m)}\rangle'$ bei Anwendung von $H'^{(2)}_{\text{Bew}}$ eine Summe von höchstens N Zuständen der Form $\varphi'^{+}_{i_1}(\vec n_1)\cdots\varphi'^{+}_{i_{\nu+1}}(\vec n_{\nu+1})\cdot\varphi'^{+}_{i_1'}(\vec n_1')\cdots\varphi'^{+}_{i_{\nu+1}'}(\vec n_{\nu+1}')\cdot|0\rangle'$ ergeben. Diese Zustände sind alle orthogonal. N ist die Anzahl der Summanden $\varphi'^{+}_{i}(\vec n)\cdot a_{ik}\,\varphi'^{+}_{k}(\vec n+\vec e_r)$ (keine Summe über i und k), die in $H'^{(2)}_{\text{Bew}}$ vorkommen. a_{ik} kann übrigens nur die Wert ± 1 und $\pm i$

1) keine Summationen

haben. Die Zustände, die durch Anwendung von $H'^{(2)}_{Bew}$ auf verschiedene der in $|\varphi^{(m)}_{2v}\rangle'$ enthaltenen Produktzustände hervorgehen, sind jedoch nicht mehr alle orthogonal. Deshalb hat ein Anteil

$$h(\vec{n}_1, i_1, \ldots, \vec{n}_{\nu+1}, i_{\nu+1}; \vec{n}'_1, i'_1, \ldots \vec{n}'_{\nu+1}, i'_{\nu+1}) \varphi'^{+}_{i_1}(\vec{n}_1) \cdots \varphi'^{+}_{i_{\nu+1}}(\vec{n}_{\nu+1}) \varphi'^{+}_{i'_1}(\vec{n}'_1) \cdots \varphi'^{+}_{i'_{\nu+1}}(\vec{n}'_{\nu+1}) |0\rangle' \quad 1)$$

aus $|\varphi^{(m)}_{2\nu+2}\rangle'$ nicht nur mit einem, sondern mit mehreren verschiedenen Vektoren $\varphi'^{+}_{i_1}(\vec{n}_1) \cdots \varphi'^{+}_{i_\nu}(\vec{n}_\nu)\, \varphi'^{+}_{i'_1}(\vec{n}'_1) \cdots \varphi'^{+}_{i'_{\nu+1}}(\vec{n}'_{\nu+1})\, |0\rangle'$ nicht verschwindende Matrixelemente über $H'^{(2)}_{Bew}$. Ihre Anzahl ist gleich der Anzahl der nicht verschwindenden orthogonalen Vektoren, die in der Summe

$$\langle 0 | \varphi'_{i_{\nu+1}}(\vec{n}'_{\nu+1}) \cdots \varphi'_{i'_1}(\vec{n}'_1)\, \varphi'_{i'_{\nu+1}}(\vec{n}_{\nu+1}) \cdots \varphi'_{i_1}(\vec{n}_1) \Big\{ \sum_{\vec{n}, i} \varphi'^{+}(\vec{n})\, \sigma_i \sigma_2 \beta_1\, \varphi'^{+}(\vec{n}+\vec{e}_i) \Big\} \quad \{\vec{n}+\vec{e}_i, \vec{n}\} \in \{7\} \qquad \text{(IV,35)}$$

vorkommen. Die Anzahl der orthogonalen Vektoren in der Summe (IV,35) ist gleich der Anzahl von nicht verschwindenden orthogonalen Vektoren in der folgenden Summe:

$$\Big\{ \sum_{\vec{n}, i} \varphi'^{T}(\vec{n}+\vec{e}_i)\, \beta_1 \sigma_2 \sigma_i\, \varphi'(\vec{n}) \Big\} \varphi'^{+}_{i_1}(\vec{n}_1) \cdots \varphi'^{+}_{i_{\nu+1}}(\vec{n}_{\nu+1})\; \varphi'^{+}_{i'_1}(\vec{n}'_1) \cdots \varphi'^{+}_{i'_{\nu+1}}(\vec{n}'_{\nu+1})\, |0\rangle'$$

$$\{\vec{n}+\vec{e}_i, \vec{n}\} \in \{7\} \qquad \text{(IV,36)}$$

(übrigens sind natürlich alle in der Summe (IV,36) vorkommenden Vektoren orthogonal)

Zu jedem Wert des Summationsindex $\vec{n}$ in (IV,36) gehören, abhängig von $\{7\}$, maximal 12 Ausdrücke der Form $\varphi'_r(\vec{n}+\vec{e}_i)\, a_{rk}\, \varphi'_k(\vec{n})$ (keine Summe über r und k), mit $a_{rk} = \pm 1, \pm i$. Terme mit r = k kommen übrigens nicht vor. Jede der speziellen Kopplungen $\varphi'_r(\vec{n}+\vec{e}_i) a_{rk} \varphi'_k(\vec{n})$ kann bei Summation über $\vec{n}$ in der Summe (IV,36) höchstens $\nu+1$ Vektoren liefern. Damit haben wir insgesamt $12(\nu+1)$ verschiedene (orthogonale) Vektoren in der Summe (IV,36). Ein Anteil $\varphi'^{+}_{i_1}(\vec{n}_1) \cdots \varphi'^{+}_{i_{\nu+1}}(\vec{n}_{\nu+1}) \cdot \varphi'^{+}_{i'_1}(\vec{n}'_1) \cdots \varphi'^{+}_{i'_{\nu+1}}(\vec{n}'_{\nu+1}) |0\rangle'$ hat also mit höchstens $12(\nu+1)$ verschiedenen (orthogonalen) Vektoren $\varphi'_{i_1}(\vec{n}_1) \cdots \varphi'_{i_\nu}(\vec{n}_\nu)\, \varphi'^{+}_{i'_1}(\vec{n}'_1) \cdots \varphi'^{+}_{i'_\nu}(\vec{n}'_\nu) |0\rangle'$ nicht verschwindende Matrixelemente über $H'^{(2)}_{Bew}$. $12(\nu+1)$ ist übrigens sehr großzügig abgeschätzt, da die 12 verschiedenen Kopplungen $\varphi'_r(\vec{n}+\vec{e}_i) a_{rk} \varphi'_k(\vec{n})$, die bei festem $\vec{n}$ möglich sind, stark interferieren. Wir können nun

1) keine Summationen

den Erwartungswert $'\langle \varphi^{(m)}_{2\nu+2} \mid H'^{(2)}_{Bew} \mid \varphi^{(m)}_{2\nu} \rangle'$ abschätzen. Da die a_{ik} nur die Werte ± 1, $\pm i$ annehmen, gilt die folgende Abschätzung

$$'\langle \varphi^{(m)}_{2\nu+2} \mid H'^{(2)}_{Bew} \mid \varphi^{(m)}_{2\nu} \rangle' \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{2}}{2L} \Big| \sum_{\substack{\vec{n}_1,\dots\vec{n}_\nu, i_1\dots i_\nu \\ \vec{n}'_1,\dots\vec{n}'_\nu, i'_1,\dots,i'_\nu}} \Big(b^*(\vec{n}''_1, i''_1, \dots, \vec{n}''_{\nu+1}, i''_{\nu+1}; \vec{n}'''_1, i'''_1, \dots, \vec{n}'''_{\nu+1}, i'''_{\nu+1}) +$$

$$+ \dots + b^*(\dots.) \Big) \cdot a(\vec{n}_1, i_1, \dots \vec{n}_\nu, i_\nu; \vec{n}'_1, i'_1, \dots \vec{n}'_\nu, i'_\nu) \Big| \qquad \text{(IV,37)}$$

Dabei wird ein a(.....) mit einer Summe von höchstens N b(.....) - Gliedern, die übrigens alle verschieden sind, wenn sie zu demselben a(.....) gehören, multipliziert. Das entspricht der Tatsache, daß die Anwendung von $H'^{(2)}_{Bew}$ auf einen Vektor $\Psi'^{+}_{i_1}(\vec{n}_1) \dots \Psi'^{+}_{i_\nu}(\vec{n}'_\nu)\,|0\rangle'$ höchstens N orthogonale Vektoren vom Typ $\Psi'^{+}_{i_1}(\vec{n}_1) \dots \Psi'^{+}_{i'_{\nu+1}}(\vec{n}'_{\nu+1})\,|0\rangle'$ ergibt. Bei der Summation über die a(.....) kann ein bestimmtes b(.....)-Glied jedoch öfters vorkommen und zwar höchstens $12(\nu+1)$ mal, gemäß der Tatsache, daß ein bestimmter Vektor $\Psi'^{+}_{i_1}(\vec{n}_1) \dots \Psi'^{+}_{i'_{\nu+1}}(\vec{n}'_{\nu+1})\,|0\rangle'$ mit höchstens $12(\nu+1)$ verschiedenen Vektoren vom Typ $\Psi'^{+}_{i_1}(\vec{n}_1) \dots \Psi'^{+}_{i'_\nu}(\vec{n}'_\nu)\,|0\rangle'$ nicht verschwindende Matrixelemente über $H'^{(2)}_{Bew}$ haben kann. Die Summanden in (IV,37) sind die Produkte $b^*(\dots.)\,a(\dots.)$. Wir können deshalb die Summe (IV,37) als skalares Produkt von zwei Vektoren B und A schreiben, wobei B aus den in der Summe vorkommenden b(.....) und A aus den in der Summe vorkommenden a(.....) besteht. Die Vektoren B und A haben folgende Eigenschaften: Die Komponenten von A sind aus der Menge $\{a(\vec{n}_1, i_1, \dots \vec{n}_\nu, i_\nu; \vec{n}'_1, i'_1, \dots \vec{n}'_\nu, i'_\nu)\}$ mit der Einschränkung, daß ein bestimmtes a(.....) nur höchstens N-mal als Komponente von A auftreten kann. Die Komponenten von B sind aus der Menge $\{b(\vec{n}_1, i_1, \dots \vec{n}_{\nu+1}, i_{\nu+1}; \vec{n}'_1, i'_1 \dots \vec{n}'_{\nu+1}, i'_{\nu+1})\}$, wobei ein bestimmtes b(.....) höchstens $12(\nu+1)$ mal als Komponente von B vorkommen kann. Damit schreiben wir für (IV,37):

$$\left| '\langle \varphi^{(m)}_{2\nu+2} \mid H'^{(2)}_{Bew} \mid \varphi^{(m)}_{2\nu} \rangle' \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{2L} \,|B \cdot A| \qquad \text{(IV,38)}$$

Wegen:

$$\sum a^*(\vec{n}_1, i_1, \ldots, \vec{n}_\nu, i_\nu; \vec{n}'_1, i'_1, \ldots \vec{n}'_\nu, i'_\nu) \cdot a(\vec{n}_1, i_1, \ldots, \vec{n}_\nu, i_\nu; \vec{n}'_1, i'_1, \ldots \vec{n}'_\nu, i'_\nu) =$$

$$= \sum b^*(\vec{n}_1, i_1, \ldots, \vec{n}_{\nu+1}, i_{\nu+1}; \vec{n}'_1, i'_1, \ldots, \vec{n}'_{\nu+1}, i'_{\nu+1}) \cdot$$

$$\cdot b(\vec{n}_1, i_1, \ldots, \vec{n}_{\nu+1}, i_{\nu+1}; \vec{n}'_1, i'_1, \ldots \vec{n}'_{\nu+1}, i'_{\nu+1}) = 1 \qquad \text{(IV,39)}$$

können wir unter Berücksichtigung der oben angegebenen Eigenschaften der Vektoren B und A folgende Aussagen über deren Norm machen:

$$|B| \leq \sqrt{12(\nu+1)} \quad ; \quad |A| \leq \sqrt{N} \qquad \text{(IV,4o)}$$

Damit erhalten wir aus (IV,38) die folgende Abschätzung:

$$|' \langle \varphi^{(m)}_{2\nu+2} | H'^{(2)}_{Bew} | \varphi^{(m)}_{2\nu} \rangle'| \leq \frac{\sqrt{2}}{2L} \sqrt{12(\nu+1)\,N} \qquad \text{(IV,-1)}$$

Die Abschätzung (IV,41) ist recht großzügig, da erstens, wie schon erwähnt, der Faktor $12(\nu+1)$ zu groß ist und zweitens nicht berücksichtigt wurde, daß von den N Summanden in $H'^{(2)}_{Bew}$ bei Anwendung auf $|\varphi^{(m)}_{2\nu}\rangle'$ manche verschwinden und zwar umso mehr, je größer ν ist. Es ist leicht zu zeigen, daß wenigestens ν Summanden verschwinden.

Wir haben schon erwähnt, daß $H'^{(2)}_{Bew}$ für sich allein ebenfalls Teilchen-Lochsymmetrisch ist. Das hat zur Folge, daß wir (IV,41) in der folgenden Form schreiben können:

$$|' \langle \varphi^{(m)}_{2\nu+2} | H'^{(2)}_{Bew} | \varphi^{(m)}_{2\nu} \rangle'| \leq \frac{\sqrt{2}}{2L} Min\left(\sqrt{12(\nu+1)\cdot N}\,, \sqrt{12(2Z^3-\nu-1)\cdot N}\right) \qquad \text{(IV,42)}$$

(IV,42) ist günstig, wenn $\nu > Z^3$ ist. Mit (IV,42), (IV,32) und (IV,33) erhalten wir die folgende Abschätzung:

$$|\langle\varphi^{(m)}|H'^{(2)}_{Bew}|\varphi^{(m)}\rangle'| \leq \frac{\sqrt{Z}}{l}\cdot Min\left(\sqrt{12\,m\cdot N}\,,\sqrt{12\,Z^3\cdot N}\right) \qquad (IV,43)$$

Wenn N groß ist ($\sim Z^3$), ist der Beitrag von $H'^{(2)}_{Bew}$ wesentlich größer als der Beitrag von $H'^{(1)}_{Bew}$ solange m von kleinerer Größenordnung als Z^3 ist. Für $m \sim Z^3$ sind die Beiträge von $H'^{(1)}_{Bew}$ und $H'^{(2)}_{Bew}$ vergleichbar. Die maximale Absenkung bei Abänderung eines Zustandes $|\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_M\rangle$ bis zur m-ten Ordnung erhalten wir, wenn wir von dem Zustand $|G_0\rangle$ ausgehen. In diesem Fall ist $H'^{(1)}_{Bew} = 0$ und $N = Z^3 \cdot 12$, so daß wir dann die folgende Abschätzung haben:

$$|\langle\varphi^{(m)}|H'_{Bew}|\varphi^{(m)}\rangle'| \leq 12\cdot\frac{\sqrt{Z}}{l}\,Min\left(\sqrt{m\cdot Z^3}\,,Z^3\right) \qquad (IV,44)$$

Daß der Faktor 12 in (IV,44) zu groß ist, haben wir schon überlegt. Im Anhang (C2) werden wir eine andere Abschätzung angeben, die, ausgehend von der Beziehung (IV,27) gleich statt $H'^{(2)}_{Bew}$ den Operator $-i\frac{\sqrt{Z}}{2l}\sum_{(alle)\vec{n},i}\{\psi^{+}(\vec{n})\sigma_i\sigma_2\beta_1\psi'^{+}(\vec{n}+\vec{e}_i) - \psi'^{T}(\vec{n}+\vec{e}_i)\beta_1\sigma_2\sigma_i\psi'(\vec{n})\}$ benutzt, den man mit einer geeigneten Transformation im Impulsraum diagonalisieren kann. Diese Abschätzung liefert statt 12 einen Faktor $\sqrt{12}$.
Für Zustände $|\varphi^{(m)}\rangle'$, die von Vektoren $|\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M\rangle$ ausgehen, die sich stark von $|G_0\rangle$ unterscheiden, ist die linke Seite von (IV,44) sehr viel kleiner als die rechte, insbesondere für Zustände $|\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_M\rangle$ mit $M \sim Z^{\beta}$ ($\beta < 3$). Für $M \sim Z$ beispielsweise ist die linke Seite kleiner als $12\cdot\frac{\sqrt{Z}}{l}\cdot\sqrt{m\cdot Z} + \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{Z}}{l}\cdot m$. Ausgehend von $|G_0\rangle$ kann man aber ohne weiteres Zustände angeben, deren Bewegungsenergie auch wirklich die Größenordnung der rechten Seite von (IV,44) hat. Der Zustand $(H_{Bew})^m|G_0\rangle$ hat z. B. wie man in der " ' " - Darstellung relativ leicht zeigen kann, eine Bewegungsenergie $\sim\frac{\sqrt{Z}}{l}\cdot\sqrt{m\cdot Z^3}$. Wenn wir von $|G_0\rangle$ ausgehen, können wir bei Abänderung der Ordnung m, wobei m von kleinerer Größenordnung als Z^3 ist, immer eine Absenkung der Gesamtenergie gegenüber $-4\nu Z^3$ erhalten,

da einem Beitrag des Bewegungsoperators von der Größenordnung $\frac{\hbar}{\iota}\cdot\sqrt{Z^3}\cdot\sqrt{m}$ eine Zunahme der Wechselwirkungsenergie von höchstens 12mW gegenübersteht. Für $W \sim \sqrt{Z}$ erwarten wir beim Grundzustand einen Beitrag[1] des Bewegungsoperators $\sim \sqrt{Z^7}$, den man erst mit $m \sim Z^3$ erhält, die Zustände $|\vec{n}_1, \dots \vec{n}_M\rangle$ müssen also vollständig umgebaut werden. Wir können das auch so auffassen, daß der Grundzustand wesentlich von den Zuständen $|\vec{n}_1, \dots \vec{n}_M\rangle$ verschieden ist. Man kann noch zeigen, daß sich die Bewegungsenergie dadurch, daß wir nicht nur einen bis zur m-ten Ordnung geänderten Zustand $|\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_M\rangle$, sondern eine Linearkombination von solchen Zuständen nehmen, nur unwesentlich ändert. Nennen wir den Änderungsoperator (IV,25), den wir auf den Zustand $|\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_M\rangle$ anwenden, $A^{\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_M}_{(m)}$. Wir setzen nun folgenden Zustand an:

$$|\varphi^{(m)}\rangle = \sum_{\vec{n}_1,\dots\vec{n}_{\frac{Z^3}{2}}} A^{\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_{\frac{Z^3}{2}}}_{(m)} |\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_{\frac{Z^3}{2}}\rangle \qquad \text{(IV,45)}$$

Wir haben $M = \frac{Z^3}{2}$ gewählt, da H_{Bew} in der D-Darstellung die Teilchenzahl erhält und damit auch M und weil wir die größten Bewegungsenergieen bei $M = \frac{Z^3}{2}$ erhalten können, für andere Werte von M ist die folgende Argumentation übrigens die gleiche. Bevor wir die Bewegungsenergie von $|\varphi^{(m)}\rangle$ abschätzen, wollen wir uns noch einmal bewußt machen, wie wir zu der Abschätzung (IV,44) gekommen sind. Wir haben den Zustand $|\varphi^{(m)}\rangle'$ durch die Basisvektoren $\varphi^{\prime+}_{i_1}(\vec{n}_1) \cdots \varphi^{\prime+}_{i_\nu}(\vec{n}_\nu) \cdot \varphi^{\prime+}_{i_1}(\vec{n}'_1) \cdots \varphi^{\prime+}_{i_\nu}(\vec{n}'_\nu)|0\rangle'$ dargestellt. Die Abschätzung (IV,44) beruht auf der Tatsache, daß jeder dieser Basisvektoren bei Anwendung von H'_{Bew} eine Summe von höchstens $12Z^3$ verschiedenen (orthogonalen) Basisvektoren ergeben kann und daß durch die Anwendung von H'_{Bew} auf verschiedene Basisvektoren der gleiche Basisvektor nur höchstens 12 (m+1) - mal, m ist der größte Wert von ν, erhalten werden kann. (Bemerkungen: Eigentlich haben wir dies nur für $H'^{(2)}_{Bew}$ gezeigt, es ist jedoch einfach nachzuweisen, daß die obige Aussage, die sich auf ganz H'_{Bew} bezieht, aus den gleichen Gründen gilt.)
Zur Darstellung von $|\varphi^{(m)}\rangle$ führen wir nun auf folgende Weise ein Basissystem ein. Wir beginnen mit irgendeinem Zustand $|\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_{\frac{Z^3}{2}}\rangle$ und transformieren ihn mit der entsprechenden Transformation (IV,8) auf einen Vakuumzustand $|0\rangle'$. In dieser Darstellung haben wir für

1) damit die Beiträge des Wechselwirkungsoperators und des Bewegungsoperators von gleicher Größenordnung sind.

$A^{\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_{\frac{z^3}{2}}}_{(m)} |\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_{\frac{z^3}{2}}\rangle$ die Basisvektoren

$$\varphi^{I+}_{i_1}(\vec{n}_1)\cdots\varphi^{I+}_{i_\nu}(\vec{n}_\nu)\varphi^{I+}_{i'_1}(\vec{n}'_1)\cdots\varphi^{I+}_{i'_\nu}(\vec{n}'_\nu)\,|0\rangle^{I} \quad ; (\nu\le m) \qquad \text{(II,46)}$$

Nun nehmen wir irgend einen anderen Zustand $|\vec{m}_1,\dots\vec{m}_{\frac{z^3}{2}}\rangle$ und transformieren ihn mit einer (anderen) Transformation (IV,8) auf einen (anderen) Vakuumzustand $|0\rangle^{II}$. In dieser Darstellung erhalten wir als Basisvektoren für $A^{\vec{m}_1,\dots\vec{m}_{\frac{z^3}{2}}}_{(m)}|\vec{m}_1,\dots\vec{m}_{\frac{z^3}{2}}\rangle$ die Vektoren:

$$\varphi^{II+}_{i_1}(\vec{n}_1)\cdots\varphi^{II+}_{i_\nu}(\vec{n}_\nu)\varphi^{II+}_{i'_1}(\vec{n}'_1)\cdots\varphi^{II+}_{i'_\nu}(\vec{n}'_\nu)\,|0\rangle^{II} \quad ; (\nu\le m) \qquad \text{(IV,47)}$$

Unter den Vektoren (IV,47) sind natürlich alle diejenigen wegzulassen, die schon in (IV,46) enthalten sind. Wir fahren nun so sukzssive fort, bis wir alle Zustände $|\vec{n}_1,\dots\vec{n}_{\frac{z^3}{2}}\rangle$ erledigt haben. Damit haben wir für $|\varphi^{(m)}\rangle$ ein Basissystem von Vektoren, die alle vom Typ (IV,46) sind und alle das gleiche m haben. Diese Basisvektoren sind in verschiedenen Darstellungen angegeben (wie z. B. in der '-Darstellung (IV,46) und der ''-Darstellung (IV,47)), ein bestimmter Basisvektor kommt jedoch immer nur in einer Darstellung vor. In diesen verschiedenen Darstellungen hat der Bewegungsoperator hinsichtlich der Verteilung von $H'^{(1)}_{Bew}$ und $H'^{(2)}_{Bew}$ verschiedene Gestalt, es gilt jedoch aus den gleichen Gründen, die auch zur Abschätzung (IV,44) geführt haben, daß jeder von diesen Basisvektoren bei Anwendung des Bewegungsoperators eine Summe von höchstens $12Z^3$ orthogonalen Basisvektoren ergeben kann und daß ein bestimmter Basisvektor nur höchstens 12(m+1) -mal bei Anwendung des Bewegungsoperators auf irgendwelche Basisvektoren erhalten werden kann. Der einzige Unterschied, der sich bei der Bestimmung von $\langle\varphi^{(m)}|H_{Bew}|\varphi^{(m)}\rangle$ gegenüber den Verhältnissen bei der Berechnung von $\langle\varphi^{(m)}|H_{Bew}|\varphi^{(m)}\rangle$ (die zu (IV,44) führte) ergibt, ist der , daß von dem Anteil von $A^{\vec{n}_1,\dots\vec{n}_{\frac{z^3}{2}}}_{(m)}|\vec{n}_1,\dots\vec{n}_{\frac{z^3}{2}}\rangle$, bei dem 2m Operatoren auf $|\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_{\frac{z^3}{2}}\rangle$ angewendet werden, auch die nicht kontrahierten Terme nicht orthogonal zu $|\varphi^{(m)}\rangle$ zu sein brauchen, wie es der Fall ist, wenn wir von nur einem Zustand $|\vec{n}_1,\dots\vec{n}_N\rangle$ ausgehen. Was unter den "nicht kontrahierten" Termen zu verstehen ist, soll noch etwas

genauer ausgeführt werden. Wir gehen dazu in die Darstellung, bei der $|\vec{n}_{1},\dots,\vec{n}\tfrac{z^3}{2}\rangle$ ein Vakuumzustand $|0\rangle'$ wird. Die Anteile, bei denen 2m Operatoren auf $|\vec{n}_{1},\dots,\vec{n}\tfrac{z^3}{2}\rangle$ angewendet werden, erscheinen in dieser Darstellung als Vektoren der Form $\psi'^{+}_{i_1}(\vec{n}_1)\cdots\cdots\psi'^{+}_{i'_m}(\vec{n}'_m)\,|0\rangle'$. Die "nicht kontrahierten" Terme sollen nun diejenigen Terme sein, die sich bei der Anwendung der $\psi'^{+}(\vec{n})\sigma_i\sigma_2\rho_1\psi'^{+}(\vec{n}+\vec{e}_i)$-Glieder aus $H'^{(2)}_{Bew}$ auf die Vektoren $\psi'^{+}_{i_1}(\vec{n}_1)\cdots\cdots\psi'^{+}_{i'_m}(\vec{n}'_m)\,|0\rangle'$ ergeben. Diese Glieder sind orthogonal zu dem Zustand $A^{\vec{n}_1,\dots\vec{n}\frac{z^3}{2}}_{(m)}(\vec{n}_1,\dots\vec{n}\tfrac{z^3}{2})$, wie man schon daran sieht, daß sie in der '-Darstellung die Teilchenzahl 2m+2 haben. In der '-Darstellung ist die höchste Teilchenzahl, die zu $A^{\vec{n}_1,\dots\vec{n}\frac{z^3}{2}}_{(m)}|\vec{n}_{1},\dots\vec{n}\tfrac{z^3}{2}\rangle$ beiträgt, jedoch 2m. Die Folge davon ist, daß die "nicht kontrahierten" Terme bei den Rechnungen, die von nur einem Zustand $|\vec{n}_{1},\dots,\vec{n}\tfrac{z^3}{2}\rangle$ ausgehen, der bis zur m-ten Ordnung abgeändert wurde, keinen Beitrag liefern. Beim Zustand $|\psi^{(m)}\rangle$ können sie jedoch in irgendwelchen anderen $A^{\vec{n}',\dots\vec{n}'\frac{z^3}{2}}_{(m)}|\vec{n}'_1,\dots,\vec{n}'\tfrac{z^3}{2}\rangle$ vorkommen, tun es in Wirklichkeit aber nur zu einem verschwindend kleinen Teil. Wir müssen in der Rechnung also schlimmstenfalls noch Matrixelemente der Form:

$$\langle\vec{n}_{1},\dots,\vec{n}\tfrac{z^3}{2}|\underbrace{\psi^{+}\cdots\psi^{+}}_{m+1}\underbrace{\psi\cdots\psi}_{m+1}|H_{Bew}|\underbrace{\psi^{+}\cdots\psi^{+}}_{m}\underbrace{\psi\cdots\psi}_{m}|\vec{n}_{1},\dots\vec{n}\tfrac{z^3}{2}\rangle \qquad \text{(IV,48)}$$

mitnehmen. Hierin liegt der einzige Unterschied gegenüber den Rechnungen zu (IV,44). Die Mitnahme der Matrixelemente (IV,48) ergibt die folgende Abschätzung:

$$|\langle\psi^{(m)}|H_{Bew}|\psi^{(m)}\rangle| \le \frac{12\sqrt{2}}{L}\,\mathrm{Min}\left(\sqrt{z^3(m+1)},\,z^3\right)$$
$$\langle\psi^{(m)}|\psi^{(m)}\rangle = 1 \qquad \text{(IV,49)}$$

Wegen der Teilchen-Loch-Invarianz der D-Darstellung können wir jeden Zustand in der Form (IV,45) mit $m \le z^3$ darstellen. Das gilt insbesondere auch für den Grundzustand $|G\rangle$. Sei m_G das in der Darstellung (IV,45) zu $|G\rangle$ gehörige m. Wir bezeichnen die Beiträge von H_{Bew} und H_N wie folgt:

$$\langle G|H_{Bew}|G\rangle = \epsilon_B \frac{\sqrt{z}^7}{l} \quad ; \langle G|H_W|G\rangle = -4Wz^3 + \epsilon_W \frac{\sqrt{z}^7}{l} \; ;$$

$$\langle G|G\rangle = 1 \qquad \text{(IV,50)}$$

Damit wir die Bewegungsenergie $\epsilon_B \frac{\sqrt{z}^7}{l}$ erhalten können, muß m_G eine durch (IV,49) gegebene Mindestgröße m_o haben. Aus (IV,49) erhalten wir:

$$m_o = z^3 \frac{\epsilon_B^2}{144} - 1 \quad ; \; m_G \geq m_o \qquad \text{(IV,51)}$$

(m_o muß natürlich ganzzahlig sein, was die rechte Seite in (IV,51) i.a. nicht ist. Man nimmt dann den nächstliegenden ganzzahligen Wert, was bei der Größe von m_o überhaupt nichts ausmacht).
Wir führen die folgende Schreibweise für m_o ein:

$$m_o + 1 = \alpha z^3 \; ; \quad \left(\alpha \leq \frac{z^3+1}{z^3}\right) \qquad \text{(IV,52)}$$

Damit gilt wegen (IV,51) : $|\epsilon_B| = 12\sqrt{\alpha}$ (IV,53)

Nun hat $|G\rangle$ sicher auch Anteile, die zu Vektoren der Form $A^{\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_M}_{(m')}|\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_M\rangle$ mit $m' < m_G$ äquivalent sind. Es interessiert uns das Gewicht dieser Anteile. Man kann sich überlegen, daß ihr Beitrag zu $|G\rangle$ sehr stark abnimmt, wenn m' merklich kleiner als m_o wird. Für unsere Zwecke genügt jedoch eine recht grobe Abschätzung, die darauf abzielt, eine obere Grenze für das Gewicht der Zustände in $|G\rangle$, die äquivalent zu Zuständen der Form $A^{\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_M}_{(m')}|\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_M\rangle$ mit $m' \leq \frac{m_o}{2}$ sind, anzugeben. Dazu zerlegen wir $|G\rangle$ in der folgenden Weise:

$$|G\rangle = \beta_1|\varphi_1\rangle + \beta_2|\varphi_2\rangle \; ;$$
$$\langle\varphi_i,\varphi_k\rangle = \delta_{ik} \; ; \quad |\beta_1|^2 + |\beta_2|^2 = 1 \qquad \text{(IV,54)}$$

Dabei enthält $|\varphi_1\rangle$ alle Anteile von $|G\rangle$, die sich in der

Form $A^{\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_M}_{(m'')}|\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M\rangle$ mit $m''\leq\frac{m_0}{2}$ schreiben lassen, während $|\varphi_2\rangle$ sich aus solchen Vektoren $A^{\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_M}_{(\bar{m})}|\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_M\rangle$ mit $\bar{m}>\frac{m_0}{2}$ zusammensetzt, die nicht in der Form $A^{\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_M}_{(\bar{m}')}|\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_M\rangle$ mit $\bar{m}'\leq\frac{m_0}{2}$ dargestellt werden können. Wir setzten die Bewegungsenergie von $|G\rangle$ an:

$$|\langle G|H_{Bew}|G\rangle| = \Big|\beta_1^*\beta_1\langle\varphi_1|H_{Bew}|\varphi_1\rangle + \beta_2^*\beta_2\langle\varphi_2|H_{Bew}|\varphi_2\rangle +$$

$$+ (\beta_1^*\beta_2\langle\varphi_1|H_{Bew}|\varphi_2\rangle + c.c.)\Big| \leq \beta_1^*\beta_1\frac{12\sqrt{2}}{L}\sqrt{2^3\left(\frac{m_0}{2}+1\right)} +$$

$$+\beta_2^*\beta_2|\epsilon_B|\frac{\sqrt{2}^7}{L} + |(\beta_1^*\beta_2\langle\varphi_1|H_{Bew}|\varphi_2\rangle + c.c.)| \qquad (IV,55)$$

Unter Vernachlässigung von Termen $\sim\frac{1}{\sqrt{2}^3}$ können wir dafür schreiben:

$$|\langle G|H_{Bew}|G\rangle| \leq |\epsilon_B|\frac{\sqrt{2}^7}{L}\left(\beta_1^*\beta_1\frac{\sqrt{2}}{2} + \beta_2^*\beta_2\right) +$$

$$+\left|\left\{\beta_1^*\beta_2\langle\varphi_1|H_{Bew}|\varphi_2\rangle + c.c.\right\}\right| \qquad (IV,56)$$

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer ist nur für die Anteile von $|\varphi_1\rangle$, die sich in der Form $A^{\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M}_{(\frac{m_0}{2})}|\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M\rangle$ schreiben lassen und nicht auf kleineres m reduzierbar sind und diejenigen Anteile von $|\varphi_2\rangle$, die von der nicht reduzierbaren Form $A^{\vec{n}_1,\dots\vec{n}_M}_{(\frac{m_0}{2}+1)}|\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_M\rangle$ sind, von Null verschieden. Seien diese Anteile $|\varphi_1\rangle_{\frac{m_0}{2}}$ bzw. $|\varphi_2\rangle_{\frac{m_0}{2}+1}$ Im Allgemeinen ist

$$\frac{m_0}{2}\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle^{\frac{1}{2}}_{\frac{m_0}{2}}\cdot{}_{\frac{m_0}{2}+1}\langle\varphi_2|\varphi_2\rangle^{\frac{1}{2}}_{\frac{m_0}{2}+1} \sim \frac{1}{2^3} \qquad (IV,57)^1$$

es sei denn, daß wir bei $|\varphi_2\rangle_{\frac{m_0}{2}+1}$ eine besondere Häufung der Zustände haben, in diesem Falle nehmen die Trennung dann z. B. an einer Stelle $\frac{m_0}{2}+\nu$ ($0\leq\nu\leq 100$) vor. Das hat wegen der Größe von Z überhaupt keinen Einfluß auf die ersten beiden Summanden in (IV,56), der Ausdruck $\frac{m_0}{2}+\nu\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle^{\frac{1}{2}}_{\frac{m_0}{2}+\nu}\cdot{}_{\frac{m_0}{2}+\nu+1}\langle\varphi_2|\varphi_2\rangle^{\frac{1}{2}}_{\frac{m_0}{2}+\nu+1}$ ist jedoch aus Gründen der Norm von $|G\rangle$ kleiner als $\frac{1}{10}$. Damit ist der Ausdruck in der geschweiften Klammer von (IV,56) kleiner als $|\epsilon_B|\frac{\sqrt{2}^7}{L}\frac{\sqrt{2}}{10}$ und wir können schließen, daß $|\beta_1|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ sein muß, damit (IV,56) noch die Energie $\epsilon_B\frac{\sqrt{2}^7}{L}$ für den Grundzustand

1) Siehe Anhang C3

ergeben kann. Das Gewicht von $|\varphi_2\rangle$ ist damit $> \frac{1}{\sqrt{2}}$. Wir untersuchen nun den Beitrag des Wechselwirkungsoperators zur Grundzustandsenergie.

$$\langle G|H_W|G\rangle = \beta_1^* \beta_1 \langle \varphi_1|H_W|\varphi_1\rangle + \beta_2^* \beta_2 \langle \varphi_2|H_W|\varphi_2\rangle \geq$$

$$\geq -4W z^3 \beta_1^* \beta_1 + \beta_2^* \beta_2 \langle \varphi_2|H_W|\varphi_2\rangle \qquad \text{(IV,58)}$$

$|\varphi_2\rangle$ besteht aus einer Summe von Ortsraumzuständen, die alle nicht in der Form $A^{(m')}_{\vec{n}_1,\ldots,\vec{n}_{m'}}|\vec{n}_1,\ldots,\vec{n}_N\rangle$ mit $m' \leq \frac{m_0}{2}$ dargestellt werden können, d.h. alle in $|\varphi_2\rangle$ vorkommenden Zustände unterscheiden sich an wenigstens $\frac{m_0}{2}$ Stellen im Ortsraum von irgendeinem der Grundzustände von H_W. Sie haben an wenigstens $\frac{m_0}{2}$ Stellen eine andere Besetzung als 0 oder 4 Teilchen (D-Darstellung). Ein Zustand, der an mindestens $\frac{m_0}{2}$ Stellen eine andere Besetzung als 0 oder 4Teilchen (D-Darstellung) hat, hat eine Wechselwirkungsenergie größer oder gleich $-4Wz^3+4W\frac{m_0}{2}$. Die gleiche Beziehung gilt für jeden in $|\varphi_2\rangle$ vorkommenden Zustand, so daß wir unter Berücksichtigung von $\beta_2^* \beta_2 > \frac{1}{2}$ schreiben können:

$$\langle G|H_W|G\rangle \geq -4Wz^3 + W\cdot m_0 \qquad \text{(IV,59)}$$

Mit $W = W_0 \frac{\sqrt{z}}{l}$ erhalten wir für ϵ_W :

$$\epsilon_W \geq \alpha \cdot W_0 \qquad \text{(IV,60)}$$

Dabei haben wir einen Term $\sim \frac{1}{z^3}$ vernachlässigt. Die Grundzustandsenergie ist nach (IV,50)

$$E_G = -4Wz^3 + \frac{\sqrt{z}^7}{l}(-|\epsilon_B| + \epsilon_W) \qquad \text{(IV,61)}$$

Sei die Absenkung der Grundzustandsenergie von H_W gleich ΔE.
Dann gilt:

$$\Delta E = E_G + 4Wz^3 = \frac{\sqrt{z}^7}{l}(-|\epsilon_B| + \epsilon_W) \qquad \text{(IV,62)}$$

Sei $\Delta E' = \frac{\Delta E}{\sqrt{z}^7}\cdot l$. Mit (IV,53) und (IV,60) gilt:

$$\Delta E' \geq -12\sqrt{\alpha} + \alpha \cdot W_0 \qquad \text{(IV,63)}$$

Damit überhaupt eine Absenkung vorliegt, muß $|\epsilon_6| > \epsilon_W$ sein. Daraus folgt, daß gilt:

$$\sqrt{\alpha} \leq \frac{12}{W_0} \qquad \text{(IV,64)}$$

Für die Absenkung der Energie ergibt sich damit die folgende Abschätzung:

$$\Delta E' \geq -\frac{144}{W_0} + \alpha W_0 \qquad \text{(IV,65)}$$

Für die Grundzustandsenergie gilt damit:

$$E_6 \geq -4W\xi^3 + \frac{\sqrt{\xi}^7}{L}\left(-\frac{144}{W_0} + \alpha W_0\right) \qquad \text{(IV,66)}$$

Für große Werte von W_0 geht E_G also gegen $-4W\xi^3$. Die Annäherung ist dabei proportional zu $\frac{1}{W_0}$.

Bei der Ableitung von (IV,66) ist es uns in erster Linie auf die funktionale Form der rechten Seite von (IV,66) angekommen, also darauf, daß die untere Schranke für E_G für große W_0 die Form $-4W\xi^3 - \frac{c}{W_0}\frac{\sqrt{\xi}^7}{L}$ hat. Auf den genauen Wert der Konstanten c haben wir dabei keinen so großen Wert gelegt. Die Zahl 144 ist dementsprechend viel zu groß geworden. Sie stammt von der Zahl 12 in (IV,44). Die Zahl 12 kam dadurch zustande, daß wir für jeden der 12^3 Summanden der Form $\Psi^+_{\ell}(\vec{m})\, a_{\ell\kappa}\, \Psi_{\ell}(\vec{m}+\vec{e}_\nu)$ des Bewegungsoperators den maximalen Beitrag in (IV,57) genommen haben. In Wirklichkeit interferieren diese Summanden bei der Bildung von $\langle \Psi^{(m)}_{2\nu+2} | H'_{\beta\varepsilon w} | \Psi^{(m)}_{2\nu} \rangle^1$ kräftig, so daß statt der Zahl 12 eine kleinere Zahl stehen müßte. Die im Anhang (32) ausgeführte Rechnung ergibt statt dessen einen Faktor $\sqrt{12}$, so daß demnach in (IV,66) statt 144 die Zahl 12 zu stehen hätte. Doch ist auch ein Faktor 12 bei $\frac{1}{W_0}$ noch viel zu groß unter anderem aus den folgenden Gründen: Einmal ist das Gewicht von in $|6\rangle$ enthaltenen Zuständen der Form $A^{\vec{n}_1,\dots,\vec{n}_m}_{(m')} |\vec{n}_1,\dots\vec{n}_m\rangle$ mit $m' < m_0$ sehr klein, wenn m' von m_0 merklich verschieden ist. Zum anderen ist die Wechselwirkungsenergie für Zustände, die eine merkliche Bewegungsenergie besitzen, deutlich größer als die in (IV,66) angegebene.

Der Vergleich von (IV,66) mit der Energie der Grundzustandsapproximation $|\Psi\rangle_{II}$ (II,21) zeigt die gleiche Form der Abhängigkeit von W_0, allerdings mit einem Faktor $-\frac{4}{7}$ bei $\frac{1}{W_0}$. Wenn wir noch bedenken, daß der Term αW_0 in (IV,66) eine Erhöhung der Energie $\sim \frac{1}{W_0}$ ergibt, da $\alpha \sim \frac{1}{W_0^2}$ ist, dann können wir in $|\Psi\rangle_{II}$ eine recht gute Approximation für

den Grundzustand sehen.

Wir haben bei der Abschätzung der Grundzustandsenergie festgestellt, daß die exakten Eigenzustände $|0\rangle_D^{(\beta)}$ und $|\bar{0}\rangle_D^{(\beta)}$ sich hinsichtlich ihrer Struktur wesentlich vom Grundzustand unterscheiden. Ihre extremen Helizitäten $-Z^3$ und Z^3 sowie die Eigenschaft, daß sie auch Eigenzustände von H_{Bew} allein sind, lassen vermuten, daß wir uns bei ihnen in einem etwas exotischen Zustand der "Welt" befinden, in dem es keine Fermionen mit Masse gibt.

Es gibt noch ein einfaches gruppentheoretisches Argument dafür, daß man über $|0\rangle_D^{(\beta)}$ und $|\bar{0}\rangle_D^{(\beta)}$ durch Anwendung einer Abänderung m-ter Ordnung keine Zustände kontruieren kann, die Fermionen mit Masse enthalten. Einer Abänderung m-ter Ordnung entspricht die Anwendung eines Polynoms $F(\gamma^+_{\beta_1}, \dots \gamma^+_{\beta_i}, \gamma_{\beta_1}, \dots, \gamma_{\beta_i})$ mit je m Operatoren γ^+_β und γ_β auf $|0\rangle_D^{(\beta)}$. Dabei entsteht ein Zustand mit der Helizität $\leq -Z^3 + m$. Bei der Anwendung von $F(\gamma^+_{\beta_1}, \dots \gamma^+_{\beta_i}, \gamma_{\beta_1}, \dots, \gamma_{\beta_i})$ verschwinden wegen der Struktur von $|0\rangle_D^{(\beta)}$ natürlich viele Summanden. Der nicht verschwindende Teil von F sei $F'(\gamma^+_{\beta_1}, \dots, \gamma^+_{\beta_i}, \gamma_{\beta_1}, \dots \gamma_{\beta_i})$. Die Transformation in die D-Darstellung zeigt, daß sich F' bei Lorentztransformationen nur nach den in der Ausredutkion von $(\frac{1}{2}, 0) \otimes \dots \otimes (m - mal) \otimes \dots \otimes (\frac{1}{2}, 0)$ enthaltenen Darstellungen transformieren kann. Darin ist aber kein $(0, \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}, 0)$ Anteil enthalten. Wenden wir eine Paritätstransformation an, dann wird aus $|0\rangle_D^{(\beta)}$ der Zustand $|\bar{0}\rangle_D^{(\beta)}$ und das Polynom geht in ein Polynom F'_p über, das sich nach den in $(0, \frac{1}{2}) \otimes \dots \otimes (0, \frac{1}{2})$ enthaltenen Darstellungen transformiert. Der gestörte Zustand $|\delta\rangle$ geht dabei in einen Zustand $|\psi\rangle_p$ über, mit der Helizität $\geq Z^3 - m$, er liegt damit in einem Unterraum, der von $|\psi\rangle$ separiert ist, will heißen keine nichtverschwindenden Matrixelemente über H mit $|\delta\rangle$ hat. Die Masse der Fermionen entsteht aber durch eine Kopplung des $(0, \frac{1}{2})$ und $(\frac{1}{2}, 0)$ Anteiles, was nur möglich ist, wenn $m \geq Z^3$ ist. Wir erwarten deshalb also nicht bei Störungen der Zustände $|0\rangle_D^{(\beta)}$ und $|\bar{0}\rangle_D^{(\beta)}$ in geringer Ordnung Fermionen mit Masse zu erhalten. Immerhin sind diese Zustände exakte Eigenzustände, die allein schon deswegen eine Untersuchung dieses Teils der Physik rechtfertigen.

V. Freie Neutrinos im Gitterraum

In den folgenden Untersuchungen werden wir wieder die β_3 -Darstellung benützen, da sie die physikalische Interpretation besonders einfach werden läßt. Die Zustände $|0\rangle_D$ und $\overline{|0\rangle}_D$ haben in der β_3 -Darstellung ein sehr einfaches Aussehen. (Wir bezeichnen die β_3 -Darstellung des Zustandes $|0\rangle_D$ mit $|0\rangle_D^{(\beta_3)}$ entsprechend $\overline{|0\rangle}_D^{(\beta_3)}$)

$$|0\rangle_D^{(\beta_3)} = \prod_{\vec{n}} \psi^+_{\beta_3}(\vec{n}) \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \rho \end{pmatrix} \psi^+_{\beta_3}(\vec{n}) |0\rangle_{\beta_3} = \prod_{\vec{k}} \psi^+_{\beta_3}(\vec{k}) \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \rho \end{pmatrix} \psi^+_{\beta_3}(\vec{k}) |0\rangle_{\beta_3}$$

$$\overline{|0\rangle}_D^{(\beta_3)} = \prod_{\vec{n}} \psi^+_{\beta_3}(\vec{n}) \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_2 \rho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \psi^+_{\beta_3}(\vec{n}) |0\rangle_{\beta_3} = \prod_{\vec{k}} \psi^+_{\beta_3}(\vec{k}) \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_2 \rho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \psi^+_{\beta_3}(\vec{k}) |0\rangle_{\beta_3} \qquad (V,1)$$

Wir können den Bewegungsoperator $H_{Bew} = \sum_{\vec{k}} \psi^+_{\beta_3}(\vec{k}) \vec{k}\vec{\sigma} \beta_3 \psi_{\beta_3}(\vec{k})$ interpretieren als den Bewegungsoperator für ein System, in dem zwei Sorten von Neutrinos existieren, die sich hinsichtlich des Zusammenhanges von Helizität und Energie unterscheiden. Wir nennen Neutrinos, die bei positiver Energie positive Helizität haben, Neutrinos vom Typ I und solche mit negativer Helizität bei positiver Energie Neutrinos vom Typ II. Der Wert des 'Helizitätsoperators'[1] $\frac{1}{2} \sum_{\vec{n}} \psi^+_{\beta_3}(\vec{n}) \beta_3 \psi_{\beta_3}(\vec{n})$ ist dann gleich der Differenz aus der halben Anzahl der Typ I minus der Anzahl der Typ II Neutrinos. Im Sinne dieser Interpretation sind im Zustand $|0\rangle_D^{(\beta_3)}$ alle Plätze für Typ II Neutrinos besetzt, während kein Typ I Neutrino anwesend ist. Im Zustand $\overline{|0\rangle}_D^{(\beta_3)}$ ist es umgekehrt. Wir

1) Wir haben die Eigenwerte dieses Operators immer Helizität genannt, was nicht ganz korrekt ist. Der Helizitätsoperator ist eigentlich $\sum_{\vec{k}} \psi^+_{\beta_3}(\vec{k}) \frac{\vec{k}\vec{\sigma}}{|\vec{k}|} \psi_{\beta_3}(\vec{k})$. Die Eigenwerte des 'Helizitätsoperators' $\frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \psi^+_{\beta_3}(\vec{k}) \beta_3 \psi_{\beta_3}(\vec{k})$ haben insofern etwas mit der Helizität zu tun, als sie bei freien Neutrinos der Helizität der Teilchen mit positiver Energie entsprechen, bzw. der negativen Helizität bei Teilchen mit negativer Energie.

werden nun die Zustände $|0\rangle_D^{(\beta_3)}$ und $\overline{|0\rangle}_D^{(\beta_3)}$ durch Anwendung von Operatoren:

$$\sum_{\vec{n},\vec{n}',i,i'} a(\vec{n},i;\vec{n}',i')\,\psi^+_{\beta_3 i}(\vec{n})\,\psi_{\beta_3 i'}(\vec{n}')$$

$$\sum_{\substack{\vec{n}_1,\vec{n}_2,i_1,i_2\\ \vec{n}_1',\vec{n}_2',i_1',i_2'}} a(\vec{n}_1,i_1,\vec{n}_2,i_2;\vec{n}_1',i_1',\vec{n}_2',i_2')\,\psi^+_{\beta_3 i_1}(\vec{n}_1)\,\psi^+_{\beta_3 i_2}(\vec{n}_2)\,\psi(\vec{n}_1')\,\psi(\vec{n}_2') \quad ;\ldots \qquad (V,2)$$

verändern. Die Operatoren aus (V,2) haben in der D-Darstellung die Form $\psi_0^+\psi_D^+$, $\psi_0^+\psi_0^+\psi_D^+\psi_D^+$,.... usw.. Da $|0\rangle_D$ die scharfe D-Teilchenzahl Null hat, entsteht also bei Anwendung einer Störung (V,2) m-ter Ordnung ein Zustand mit der scharfen D-Teilchenzahl 2m. Der Hamiltonoperator der D-Darstellung erhält die D-Teilchenzahl, so daß wir keine Übergangselemente zwischen Systemen, die verschiedenen Ordnungen der Störungstheorie entsprechen, haben. Die Störungsrechnung vermittels (V,2) zerfällt also in der Ordnung der Störung. Das hat zur Folge, daß wir jede Ordnung der Störungstheorie für sich betrachten und in ihr exakte Eigenzustände konstruieren können. Das hat den Vorteil, daß wir in der Lage sind leicht exakte Eigenzustände zu konstruieren, die sich allerdings physikalisch nicht sehr von $|0\rangle_D$ unterscheiden, aber auch den Nachteil, daß wir über Zustände, die physikalisch wesentlich von $|0\rangle_D$ verschieden sind, erst mit einer Störungsrechnung der Ordnung Z^3 Aussagen machen können. Da $\overline{|0\rangle}_D$ mit einer Teilchen-Lochtransformation aus $|0\rangle_D$ hervorgeht, gilt für diesen Zustand natürlich das Gleiche. Wir stören nun $|0\rangle_D$ in erster Ordnung, indem wir ein Typ II Neutrino herausnehmen und durch ein Typ I Neutrino ersetzen. Damit erhalten wir einen Zustand mit der "Helizität" $-Z^3 + 1$, der die allgemeine Form

$$|\nu\rangle_{\beta_3} = \sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2} \psi^+_{\beta_3}(\vec{k}_1)\; A(\vec{k}_1,\vec{k}_2)\; \psi_{\beta_3}(\vec{k}_2)\,|0\rangle_D^{(\beta_3)} \qquad (V,3)$$

hat. $|\nu\rangle_{\beta_3}$ wird in der D-Darstellung ein Zweiteilchenzustand:

$$|\nu\rangle_D = \sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2} \psi^+_D(\vec{k}_1)\; B(\vec{k}_1,\vec{k}_2)\; \psi^{\#}_D(\vec{k}_2)\,|0\rangle_D \qquad (V,4)$$

Wir reduzieren nun $|\nu\rangle_D$ nach dem Isospin aus. Damit zerfällt $|\nu\rangle_D$ in zwei Zustände $|\nu_0\rangle_D$ und $|\nu_1\rangle_D$ zum Isospin $T = 0$ und $T = 1$, die miteinander keine Matrixelemente über dem Hamiltonoperator haben. Wenden

wir uns zuerst dem Zustand $|\nu_0\rangle_D$ zu. Er hat die allgemeine Form:

$$|\nu_0\rangle_D = \Big(\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2} \psi_D^+(\vec{k}_1)\beta_2\vec{\sigma}\sigma_2\, a(\vec{k}_1,\vec{k}_2)\,\psi_D^{\#}(\vec{k}_2) + \\ + \psi_D^+(\vec{k}_1)\, b(\vec{k}_1,\vec{k}_2)\,\beta_2\sigma_2\,\psi_D^{\#}(\vec{k}_2)\Big)\,|0\rangle_D \qquad (V,5)$$

Wir verwenden die Normaldarstellung (III,14) des Wechselwirkungsoperators H_W^A. Dabei zeigt sich, daß die Anwendung des Vierfermionenanteils von (III,14) auf $|\nu_0\rangle_D$ Null ergibt, so daß gilt:

$$H\,|\nu_0\rangle_D =$$

$$= \Big(\sum_{\vec{k}} \{\psi_D^+(\vec{k})\,\vec{\kappa}\vec{\sigma}\,\psi_D(\vec{k}) + 6W\psi_D^+(\vec{k})\psi_D(\vec{k})\} - 4Wz^3 \Big)\,|\nu_0\rangle_D \qquad (V,6)$$

Der Rest des Hamiltonoperators, der in (V,6) noch zur Wirkung kommt, ist im Impulsraum diagonal, so daß es genügt das folgende Eigenwertproblem zu untersuchen:

$$H\,|\nu_0\rangle_D' = \lambda\cdot|\nu_0\rangle_D' =$$

$$= \Big(\sum_{\vec{k}} \{\psi_D^+(\vec{k})\,\vec{\kappa}\vec{\sigma}\,\psi_D(\vec{k}) + 6W\psi_D^+(\vec{k})\psi(\vec{k})\} - 4Wz^3 \Big)\cdot$$

$$\cdot\big(\psi_D^+(\vec{k}_1)\beta_2\vec{\sigma}\sigma_2\,\vec{a}(\vec{k}_1,\vec{k}_2)\,\psi_D^{\#}(\vec{k}_2) + \psi_D^+(\vec{k}_1)\,b(\vec{k}_1,\vec{k}_2)\,\beta_2\sigma_2\,\psi_D^{\#}(\vec{k}_2)\big)\cdot|0\rangle_D$$

bzw.

$$\sum_{\vec{k}} \psi_D^+(\vec{k})\,\vec{\kappa}\vec{\sigma}\,\psi_D(\vec{k})\,|\nu_0\rangle_D' = (\lambda + 4Wz^3 - 12W)\,|\nu_0\rangle_D' \qquad (V,7)$$

(V,7) führt mit $\lambda' = (\lambda + 4Wz^3 - 12W)$ auf das Gleichungssystem:

$$\lambda' b(\vec{k}_1,\vec{k}_2) = \vec{\kappa}_1\vec{a}(\vec{k}_1,\vec{k}_2) - \vec{\kappa}_2\vec{a}(\vec{k}_1,\vec{k}_2)\ ;$$
$$\lambda'\vec{a}(\vec{k}_1,\vec{k}_2) = b(\vec{k}_1,\vec{k}_2)\vec{\kappa}_1 - b(\vec{k}_1,\vec{k}_2)\vec{\kappa}_2 + i(\vec{\kappa}_1\times\vec{a}(\vec{k}_1,\vec{k}_2)) + \\ + i(\vec{\kappa}_2\times\vec{a}(\vec{k}_1,\vec{k}_2)) \qquad (V,8)$$
$$\vec{\kappa}_1 = \vec{\kappa}(\vec{k}_1)\ ;\ \vec{\kappa}_2 = \vec{\kappa}(\vec{k}_2)$$

Die Lösung von (V,8) lautet:

$b\,(\vec{h}_1, \vec{h}_2) = c$; c: beliebige Konstante

$$\vec{a}(\vec{h}_1, \vec{h}_2) =$$

$$= \frac{c}{(\lambda' - \frac{1}{\lambda'}(\vec{k}_1+\vec{k}_2)^2)} \left\{ (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) - \frac{1}{\lambda'^2}(\vec{k}_1+\vec{k}_2)(\vec{k}_1^2 - \vec{k}_2^2) - \frac{2i}{\lambda'} \vec{k}_1 \times \vec{k}_2 \right\} \qquad (V,9)$$

Die Konstante c wird durch die Normierungsbedingung bestimmt gemäß:

$$\frac{1}{\delta} = \vec{a}^*(\vec{h}_1, \vec{h}_2)\vec{a}(\vec{h}_1, \vec{h}_2) + b^*(\vec{h}_1, \vec{h}_2) b(\vec{h}_1, \vec{h}_2).$$

λ' folgt aus der Gleichung:

$$\lambda'^4 - 2\lambda'^2(\vec{k}_1^2 + \vec{k}_2^2) + (\vec{k}_1^2 - \vec{k}_2^2)^2 = 0\,; \qquad (V,10)$$

(V,10) ergibt für λ' :

$$\lambda' = \pm |\vec{k}_1| \pm |\vec{k}_2| \qquad (V,11)$$

Mit einem der vier Werte für λ' aus (V,11) und den entsprechenden aus (V,9) folgenden Werten für $\vec{a}\ (\vec{h}_1, \vec{h}_2)$ und $b\ (\vec{h}_1, \vec{h}_2)$ ist $|\nu_0\rangle'_0$ exakter Eigenzustand des gesamten Hamiltonoperators. Für $\vec{h}_1 = \vec{h}_2$ gelten statt (V,9) und (V,10) die Beziehungen:

$$\lambda' = \pm 2\cdot|\vec{k}| \quad ; \quad b(\vec{k}, \vec{k}) = 0$$

$$\vec{a}(\vec{k}, \vec{k}) = \left(\vec{k} \times \vec{c} + i \frac{2}{\lambda'} (\vec{k}(\vec{k}\vec{c}) - \vec{c}\,\vec{k}^2) \right)$$

$\vec{c}$: beliebiger reeller Vektor mit: $(\vec{c} \times \vec{k})^2 = \frac{1}{24}$

(V,12)

$|\nu_0\rangle'_D$ hat in der β_3-Darstellung die Form:

$$|\nu_0\rangle'_{\beta_3} = \Big\{ \frac{i}{2} \psi^+_{\beta_3}(\vec{k}_1)(\beta_1 + i\beta_2)\vec{\sigma}\vec{a}(\vec{k}_1,\vec{k}_2)\psi_{\beta_3}(-\vec{k}_2) +$$

$$+ \frac{i}{2} \psi^+_{\beta_3}(\vec{k}_1) b(\vec{k}_1,\vec{k}_2)(\beta_1 + i\beta_2)\psi_{\beta_3}(-\vec{k}_2) + \frac{i}{2}\psi^+_{\beta_3}(\vec{k}_2)(\beta_1 + i\beta_2)\vec{\sigma}\vec{a}(\vec{k}_1,\vec{k}_2)\psi_{\beta_3}(-\vec{k}_1) -$$

$$- \frac{i}{2} \psi^+_{\beta_3}(\vec{k}_2) b(\vec{k}_1,\vec{k}_2)(\beta_1 + i\beta_2)\psi_{\beta_3}(-\vec{k}_1) \Big\} |0\rangle^{(\beta_3)}_D \qquad (V,13)$$

Der Zustand $|\nu_0\rangle'_{\beta_3}$ ist Eigenvektor sowohl des gesamten Hamiltonoperators, als auch des Bewegungsoperators allein:

$$H|\nu_0\rangle'_{\beta_3} = (\lambda' - 4Wz^3 + 12W)|\nu_0\rangle'_{\beta_3} \; ; \qquad (V,14)$$

$$\Big(\sum_{\vec{k}} \psi^+_{\beta_3}(\vec{k})\,\beta_3\,\vec{k}\vec{\sigma}\,\psi_{\beta_3}(\vec{k}) \Big)|\nu_0\rangle'_{\beta_3} = \lambda'\,|\nu_0\rangle'_{\beta_3} \qquad (V,15)$$

Wegen (V,15) können wir $|\nu_0\rangle'_{\beta_3}$ als einen Zustand mit zwei Neutrinos, deren Impulse $\vec{k}_1$ und $\vec{k}_2$ sind, interpretieren. Es handelt sich dabei um zwei Neutrinos vom Typ I, genauer um ein Neutrino vom Typ I und ein Loch im vollkommen besetzten Raum der Typ II Neutrinos, das sich wie ein Typ I Neutrino verhält. Wir haben damit zwei freie Neutrinos als exakte Lösung der Theorie. Da $|\nu_0\rangle'_D$ den Isospin T = 0 hat, ist $|\nu_0\rangle'_{\beta_3}$ nicht äquivalent zu einem Zustand mit einer von $2z^3$ verschiedenen Teilchenzahl (β_3 - bzw. B-Darst.) Der Grund für das Auftreten dieser Lösungen war in der D-Darstellung das Verschwinden des Vierfermionenanteils der Normaldarstellung von H_W^A . In der β_3 - Darstellung verschwindet dieser Anteil keineswegs, so daß die eigentliche Ursache woanders zu suchen ist. Sie ist in der Form des lokalen Energiespektrums von H_W^A begründet. Wenn wir die Energie vom Grundzustand mit -4W aus rechnen, dann haben die Zweiteilchenzustände mit S = 1 und T = 0 gerade die doppelte Energie wie die Ein- bzw. Dreiteilchenzustände. Die Folge davon ist, daß die Zweiteilchenzu-

stände $\psi_D^+(\vec{n})\beta_2\sigma_i\sigma_2\psi_D^+(\vec{n})|0\rangle_D$ und $\psi^+(\vec{n}_1)\beta_2\sigma_i\sigma_2\psi^+(\vec{n}_2)|0\rangle_D$; $\vec{n}_1 \neq \vec{n}_2$ über dem Grundzustand $|0\rangle_D$ von H_W^A die gleiche Wechselwirkungsenergie haben. Der Wechselwirkungsoperator H_W^B hat die gleiche Eigenschaft, so daß $|\nu_0\rangle'_D$ für die B-Wechselwirkung ebenfalls exakter Eigenzustand ist, wobei λ hier den Wert $\lambda' - 8WZ^3 + 16W$ hat. Aus den obigen Gründen gibt es zum Beispiel unter den, physikalisch allerdings uninteressanten, Zweiteilchenzuständen über $|0\rangle_{\beta 3}$ keinen $|\nu_0\rangle'_{\beta 3}$ entsprechenden Zustand, da es über $|0\rangle_{\beta 3}$ keinen lokalen Zweiteilchenzuzustand mit der doppelten Energie des lokalen Einteilchenzustandes gibt .

Wir erwähnen noch, daß das Zusatzteilchenproblem für $|0\rangle_D$ trivial ist, da $|0\rangle_D$ in der D-Darstellung Vakuumzustand ist und ein zugefügtes Teilchen natürlich keine Wechselwirkung erfährt. Die einfache Rechnung ergibt zwei Eigenzustände mit $2Z^3 + 1$ bzw. $2Z^3 - 1$ Teilchen, einmal mit einem Typ I Neutrino als Zusatzteilchen und einmal mit einem Typ II Neutrino Loch, was ebenfalls wieder ein Typ I Neutrino darstellt. Der Eigenwert des Hamiltonoperatortors ist in beiden Fällen: $\lambda = \pm|\vec{k}| - 4WZ^3 + 6W$. Es ist natürlich auch möglich, die gleichen Ergebnisse für Typ II Neutrinos zu erhalten. Dazu müssen wir nur auf die erhaltenen Eigenzustände eine Paritätstransformation anwenden mit:

$$\psi'_{\beta 3}(-\vec{k}) = \beta_1\psi_{\beta 3}(\vec{k}) \qquad \text{und} \qquad P|0\rangle_D^{(\beta 3)} = |\overline{0}\rangle_D^{(\beta 3)} \qquad (V,16)$$

(V,16) führt z. B. $|\nu_0\rangle'_{\beta 3}$ in einen Zustand über, der zwei Typ II Neutrinos enthält. Der Term +12W in (V,14) ist eine Folge der Rechnung im Schrödingerbild, in einer konsequenten relativistischen Rechnung dürfte er nicht auftreten.
Bei der Störung von $|0\rangle_D^{(\beta 3)}$ in erster Ordnung treten auch noch Zustände zum Isospin T = 1 auf. Für $T_3 = 0$ haben sie in der B-Darstellung die Teilchenzahl $2Z^3$, sie sind aber entartet zu Zuständen mit $2Z^3 + 2$ und $2Z^3 - 2$ Teilchen. Der Einfachste unter ihnen ist der Zustand $|\eta_1'\rangle$ von (III,40) mit $H|\eta_1'\rangle = -4W(Z^3 - 1)|\eta_1'\rangle$. Um weitere Lösungen zu erhalten, machen wir den folgenden Ansatz für $|\nu_1\rangle_D$:

$$|\nu_1\rangle_D = \sum_{\vec{k}'} \{ \varphi_D^+(\vec{k}')\, \vec{\sigma}\, \vec{a}(\vec{k}')\sigma_2 \rho_1 \varphi_D^*(\vec{k}-\vec{k}') + \varphi_D^+(\vec{k}')\, b(\vec{k}')\rho_1\sigma_2 \varphi^*(\vec{k}-\vec{k}')\,|0\rangle_D \qquad (V,17)$$

Die Anwendung von H auf $|\nu_1\rangle_D$ ergibt: $H|\nu_1\rangle_D =$

$$= (-4Wz^3+12W)\cdot|\nu_1\rangle_D - \Big(\frac{8W}{z^3}\sum_{\vec{k}''} b(\vec{k}'')\Big)\sum_{\vec{k}'}\varphi_D^+(\vec{k}')\rho_1\sigma_2\varphi_D^*(\vec{k}-\vec{k}')\,|0\rangle_D +$$

$$+\sum_{\vec{k}'}\varphi_D^+(\vec{k}')\{i(\vec{k}'+\vec{k}(\vec{k}-\vec{k}'))\times\vec{a}(\vec{k}') + (\vec{k}'-\vec{k}(\vec{k}-\vec{k}'))\cdot b(\vec{k}')\}\vec{\sigma}\sigma_2\rho_1\varphi_D^*(\vec{k}-\vec{k}')\cdot|0\rangle_D +$$

$$+\sum_{\vec{k}'}\varphi_D^+(\vec{k}')\{\vec{k}'-\vec{k}(\vec{k}-\vec{k}')\}\vec{a}(\vec{k}')\,\rho_1\sigma_2\varphi_D^*(\vec{k}-\vec{k}')\,|0\rangle_D \qquad (V,18)$$

Mit $H|\nu_1\rangle_D = \lambda|\nu_1\rangle_D$ erhalten wir das folgende Eigenwertproblem:

$$\epsilon\cdot b(\vec{k}') = \Big(\frac{8W}{z^3}\sum_{\vec{k}''} b(\vec{k}'')\Big) - (\vec{k}'-\vec{k}(\vec{k}-\vec{k}'))\,\vec{a}(\vec{k}') \quad ;$$

$$\epsilon\cdot\vec{a}(\vec{k}') = -i(\vec{k}'+\vec{k}(\vec{k}-\vec{k}'))\times\vec{a}(\vec{k}') - (\vec{k}'-\vec{k}(\vec{k}-\vec{k}'))\,b(\vec{k}') \quad ; \qquad (V,19)$$

Dabei ist $\epsilon = -(\lambda + 4Wz^3 - 12W)$

Wegen der Homogenität des Gleichungssystems können wir $b(\frac{\vec{k}}{2}) = 1$ wählen. Damit folgt aus der ersten Gleichung von (V,19) $\epsilon = \frac{8W}{z^3}\sum_{\vec{k}''} b(\vec{k}'')$ (V,19) erhält dann die einfachere Gestalt:

$$\epsilon\cdot b(\vec{k}') = \epsilon - (\vec{k}'-\vec{k}(\vec{k}-\vec{k}'))\,\vec{a}(\vec{k}') \quad ;$$

$$\epsilon\cdot\vec{a}(\vec{k}') = -i(\vec{k}'+\vec{k}(\vec{k}-\vec{k}'))\times\vec{a}(\vec{k}') - (\vec{k}'-\vec{k}(\vec{k}-\vec{k}'))\cdot b(\vec{k}') \qquad (V,20)$$

Man kann leicht Lösungen mit $\epsilon = 0$ angeben, indem man

$$b(\tfrac{\vec{k}}{2}) = 1 \quad ; \quad b(\vec{k}_0) = -1 \; ; \; b(\vec{k}') = 0 \quad \text{sonst} \quad ; \qquad (V,21)$$

wählt. $\vec{h}_o$ ist durch die folgende Gleichung bestimmt:

$$\vec{K}^2(\vec{h}_o) = (\vec{K}(\vec{h}-\vec{h}_o))^2 \qquad (V,22)$$

Für $\vec{a}$ ($\vec{h}_o$) gilt:

$$\vec{a}(\vec{h}_o)=(\vec{a}_2(\vec{h}_o);\ \vec{a}_2(\vec{h}_o) \text{ reell und } (\vec{K}_o+\vec{K}(\vec{h}-\vec{h}_o))\times\vec{a}_2(\vec{h}_o)=(\vec{K}_o-\vec{K}(\vec{h}-\vec{h}_o)) \qquad (V,23)$$

Die Lösungen zu $\epsilon = 0$ stellen also eine Linearkombination von zwei Zweineutrinozuständen mit Bewegungsenergie Null dar. Etwas interessanter sind die nächsteinfacheren Lösungen, die man erhält, wenn man $\vec{h} = \vec{0}$ setzt. Man erhält dann:

$$\vec{a}(\vec{h}') = -2\vec{K}'\frac{b(\vec{h}')}{\epsilon} \quad ; \quad b(\vec{h}') = \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2-4\vec{K}'^2} \qquad (V,24)$$

ϵ folgt aus der Selbstkonsistenzgleichung für die b ($\vec{h}'$) :

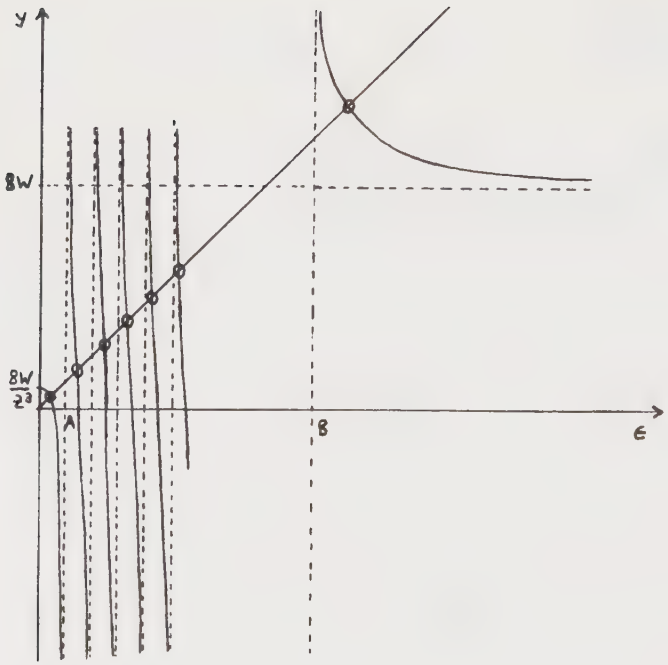
$$\epsilon = \frac{8W}{\Sigma^3} + \frac{8W}{\Sigma^3}\sum_{\vec{h}'\neq\vec{0}}\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2-4\vec{K}'^2} \qquad (V,25)$$

Einen Überblick über die Lösungen von (V,25) erhalten wir, wenn wir die Funktionen

$$y = f_1(\epsilon) = \epsilon \quad ; \qquad \text{und}$$

$$y = f_2(\epsilon) = \frac{8W}{\Sigma^3} + \frac{8W}{\Sigma^3}\sum_{\vec{h}'\neq\vec{0}}\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2-4\vec{K}'^2} \qquad (V,26)$$

in Abbildung 6 graphisch darstellen.



$A = 2 \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{z} \cdot l}$ (minimaler Wert für $\sqrt{4\ k'^{\,2}}$)

$B = \frac{\sqrt{12 \cdot z}}{l}$ (maximaler Wert für $\sqrt{4\ k'^{\,2}}$)

Abb. 6

Für $\delta W > \sqrt{B}$ sieht die rechte Seite der Figur in Abb. 6 wie in Abb. 7 dargestellt aus:

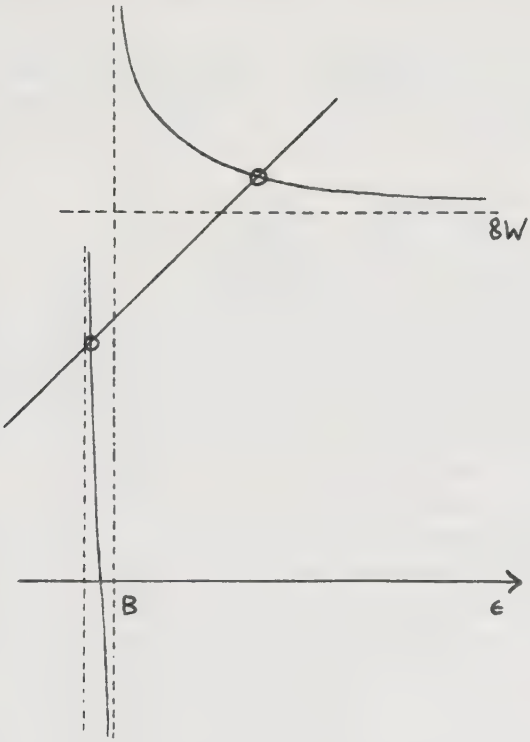


Abb. 7

Diezu den Eigenwerten zwischen 0 und B gehörenden Lösungen sind physikalisch als freie Zustände zu interpretieren, da sich ϵ^2 von $4\vec{k}'^2$ nur um einen Term, der im Allgemeinen wesentlich kleiner als $\frac{1}{L^2}$ ist, unterscheidet. Innerhalb dieser Genauigkeit haben sie die gleiche Energie wie die Zustände $|\nu_0\rangle_D$. Vom "Kontinuum" der quasi-freien Zustände spaltet ein Zustand ab, der sich wesentlich anders verhält, so daß wir ihn als Bindungszustand interpretieren. Es ist der Zustand, der zum maximalen ϵ gehört. Dieses ist aber immer größer als δW, so daß die Energie dieses Zustandes immer unterhalb $-4W\,(Z^3-1)$ liegt. Hinsichtlich der Lorentztransformationen ist dieser Zustand eine Linearkombination eines (1,0) Vektors und eines Skalars. Die

Energieabsenkung gegenüber den quasifreien Zuständen und damit die Bindung wird durch den skalaren Anteil bewirkt. Leider transformiert sich die Energie ϵ des Bindungszustandes, wenn wir ins bewegte System gehen, nicht lorentzkovariant, so daß wir sie nicht ohne weiteres mit der Masse eines Teilchens identifizieren können. Daran ändert sich auch nichts, wenn wir die "Sägezahndispersionsbeziehung" benutzen. So erhalwir z. B. in diesem Fall aus (V,19) für $\vec{h} \neq \vec{0}$ die Eigenwertgleichung:

$$\frac{8W}{Z^3} \sum_{\vec{h}'} \frac{m^4}{(m^4 - (2m\vec{k}' - 2(\vec{k}' \times \vec{K}))^2)\sqrt{\vec{k}'^2 + m^2}} = 1 \qquad \text{(V,27)}$$

Den Eigenwert ϵ von (V,19) haben wir in (V,27) durch $\epsilon = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ ersetzt. m ist dann die Bindungsenergie für $\vec{h} = \vec{0}$, wie man an (V,27) sieht, wenn man $\vec{h} = \vec{0}$ setzt. Die Gleichung (V,27) ist bei festem m wegen der kubischen Form des $\vec{h}'$ Raumes nicht gegenüber Drehungen invariant, so daß m von der Richtung von $\vec{k}$ abhängt. Aus (V,27) folgt auch noch eine $|\vec{k}|$ Abhängigkeit von m . m ist also sicher keine skalare Größe. Für die Sinusdispersionsbeziehung ist die der Gleichung (V,27) entsprechende Eigenwertgleichung noch etwas komplizierter. Die Verhältnisse sind jedoch die gleichen, m ist wieder eine Funktion von $\vec{k}$. In der B-Wechselwirkung erhalten wir die gleichen Ergebnisse, nur hat in (V,25) und (V,27) 16W statt 8W zu stehen.

Es ist uns also, ausgehend von den Zuständen $|0\rangle_D^{(\beta_3)}$ und $|\bar{0}\rangle_D^{(\beta_3)}$, gelungen, exakte Lösungen zu finden, die die Teilchenzahl $2Z^3$ haben und zwei freie Neutrinos mit beliebigen Impulsen enthalten. Weitergehende Untersuchungen lassen vermuten, daß bei Teilchenzahl $2Z^3$ auch nicht mehr freie Neutrinos mit von Null verschiedener Bewegungsenergie in exakten Eigenzuständen enthalten sein können, denn sowie man mehr als zwei Neutrinos hat, macht sich eine Wechselwirkung zwischen ihnen bemerkbar, die die Energie absenkt. Dieser Effekt ist natürlich sehr klein, wenn es nur sehr wenige Neutrinos sind.

Fermionen mit Masse konnten wir, wie schon an anderer Stelle gezeigt wurde, bei Störungen geringer Ordnung von $|0\rangle_D^{(\beta_3)}$ und $|\bar{0}\rangle_D^{(\beta_3)}$ nicht erwarten. Im Vergleich dazu hat der Zustand $|16_0\rangle$ (IV,15), der wie $|0\rangle_D^{(\beta_3)}$ und $|\bar{0}\rangle_D^{(\beta_3)}$ ebenfalls Grundzustand von H_W ist, allerdings zur Helizität Null, ganz andere physikalische Eigenschaften. Wenn wir

den vermittels (IV,16) auf einen Vakuumzustand transformieren, hat in dieser β_0 -Darstellung der Hamilton Operator die Gestalt:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \left\{ \psi^{+}_{\sigma_0}(\vec{k})\, \vec{\kappa}\vec{\sigma}\sigma_2\beta_1 \psi^{*}_{\sigma_0}(-\vec{k}) + \psi^{T}_{\sigma_0}(-\vec{k})\, \sigma_2\vec{\sigma}\vec{\kappa}\beta_1 \psi_{\sigma_0}(\vec{k}) \right\} +$$

$$+ W \sum_{\vec{n}} \left\{ -\psi^{+}_{\sigma_0}(\vec{n})\sigma_2\beta\beta_2 \psi^{*}_{\sigma_0}(\vec{n})\psi^{T}_{\sigma_0}(\vec{n})\sigma_2\beta_2\beta\psi_{\sigma_0}(\vec{n}) + 6\psi^{+}_{\sigma_0}(\vec{n})\psi_{\sigma_0}(\vec{n}) - 4 \right\} \qquad (V,28)$$

Der Teilchenzahlterm $6W\psi^{+}_{\sigma_0}(\vec{n})\psi_{\sigma_0}(\vec{n})$ aus dem Wechselwirkungsoperator, der in den anderen Darstellungen recht nutzlos ist, hat hier eine bemerkenswerte Eigenschaft. Er verhält sich nämlich zum Bewegungsoperator wie ein Massenterm. Man zeigt das leicht, wenn man ein bestimmtes Impulspaar $\vec{k}_0, -\vec{k}_0$ herausgreift. Die zu $\vec{k}_0$ und $-\vec{k}_0$ gehörenden Bilinearterme von (V,28) sind:

$$\psi^{+}_{\sigma_0}(\vec{k}_0)\, \vec{\kappa}\vec{\sigma}\sigma_2\beta_1\psi^{*}_{\sigma_0}(-\vec{k}_0) + \psi^{T}_{\sigma_0}(-\vec{k}_0)\, \sigma_2\vec{\sigma}\vec{\kappa}\beta_1\psi_{\sigma_0}(\vec{k}_0) +$$

$$+ 6W\psi^{+}_{\sigma_0}(\vec{k}_0)\psi_{\sigma_0}(\vec{k}_0) + 6W\psi^{+}_{\sigma_0}(-\vec{k}_0)\psi(-\vec{k}_0) \,; \qquad (V,29)$$

Mit den achtkomponentigen Spinoren:

$$\hat{\psi}^{T}_{\sigma_0}(\vec{k}_0) = (\psi^{T}(\vec{k}_0) \,, -\psi^{+}(-\vec{k}_0)\sigma_2) \qquad (V,30)$$

wird aus (V,29)

$$\hat{\psi}^{+}_{\sigma_0}(\vec{k}_0)\lambda_0\beta_1\vec{\kappa}\vec{\sigma}\hat{\psi}_{\sigma_0}(\vec{k}_0) + 6W\hat{\psi}^{+}_{\sigma_0}(\vec{k}_0)\lambda_3\hat{\psi}_{\sigma_0}(\vec{k}_0) + 24W \qquad (V,31)$$

Für den Energieerwartungswert von Zuständen der Form:

$$\sum_{i_1,\dots,i_r} a_{i_1\dots i_r}(\vec{k}_1,\dots,\vec{k}_r)\, \psi^{+}_{i_1\sigma_0}(\vec{k}_1)\cdots\psi^{+}_{i_r\sigma_0}(\vec{k}_r)\,|0\rangle_{\sigma_0} \qquad (V,32)$$

(keine Summe über $\vec{h}_i$)
spielt der Vierfermionenanteil von H_N^A keine Rolle, solange r endlich also klein im Verhältnis zu $\sqrt{Z}$ ist. Der Erwartungswert von $H_{Bew} + H_N^A$ wird dann von der Diracgleichung (V,31) bestimmt, so daß wir Ausdrücke für die Energie erhalten, die sich zusammensetzen aus der Energie $-4WZ^3$ von $|G_o\rangle$ und aus Summanden der Form $\pm\sqrt{\vec{k}^2+(6W)^2}$ zuzüglich einer Energie $+6W$ pro "freies Teilchen mit Masse $6W$". Die dazu gehörenden Zustände (V,32) haben natürlich in der B-Darstellung alle die Teilchenzahl $2Z^3$. Es ist vielleicht etwas verwirrend, daß der Bilinearterm von H_N^A in (V,28) nicht mehr mit dem Bewegungsoperator vertauscht, was er in den anderen Darstellungen üblicherweise tut. Das liegt daran, daß der Anteil $\sum_{\vec{n}} 6W\,\psi^+_{G_o}(\vec{n})\,\psi_{G_o}(\vec{n})$ nicht aus dem Term $\sum_{\vec{n}} \psi^+_D(\vec{n})\,\psi_D(\vec{n})\cdot 6W$ von (III,14) entstanden ist, sondern aus dem Vierfermionenanteil von (III,14). Wir erwähnen noch abschließend, daß der Zustand $|G_o\rangle$ mit der Grundzustandsapproximation $|\varphi\rangle_{(II)}$ zusammenhängt. Man erhält ihn nämlich aus $|\varphi\rangle_{(II)}$, wenn $W \to \infty$ geht.
$m \to 6W\,(\to\infty)$

VI Zusammenfassung

In Kapitel I wird der von F.Bopp vorgeschlagene Wechselwirkungsoperator $W \sum_{\vec{n}} \{\psi^+(\vec{n})\vec{\sigma}\psi(\vec{n})\psi^+(\vec{n})\vec{\sigma}\psi(\vec{n}) - \psi^+(\vec{n})\vec{\sigma}\psi(\vec{n})\psi^+(\vec{n})\vec{\sigma}\psi(\vec{n})\}$ untersucht. Man findet dabei eine hohe Symmetrie dieses Operators, die sich unter anderem in einer SU(2)-Gruppe, unter deren Generatoren auch der"Helizitätsoperator" $\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}} \psi^+(\vec{n})\vec{\sigma}\psi(\vec{n})$ ist, und in einer Transformation, die W nach -W transformiert. Die Symmetrietransformationen können so modifiziert werden, daß sie den gesamten Hamiltonoperator invariant lassen,bzw. H_{Bew} invariant lassen und H_W^B in $-H_W^B$ überführen((I,11) , (I,12)). Die Transformationen (I,11) und (I,12) sind jedoch ganz typische Gitterraumtransformationen, die nicht auf eine Kontinuumstheorie übertragen werden können. Es ist jedoch die Absicht dieser Arbeit konsequente Gitterraumtheorie zu betreiben und den Gitterraum nicht nur als Annäherung des "eigentlich richtigen Kontinuums" zu sehen. Die Transformationen (I,11) und (I,12) werden als ganz spezielle Eigentümlichkeiten der Gitterraumtheorie weiter verfolgt und liefern in Kapitel II eine ziemlich gute Grundzustandsapproximation (II,13) bei A-Wechselwirkung, die noch dazu sehr einfach ist und die Eigenschaften eines Diracsees von Fermionen mit Masse hat. Wir können von Fermionen mit Masse insofern reden, als Anregungsenergien über diesem Zustand hauptsächlich durch Terme $\sqrt{\vec{k}^2+m^2}$ bestimmt werden, während die Einbettungsenergie sich nur unwesentlich ändert.(Bei Anregungen endlicher Ordnung). Die Energie dieser Grundzustandsapproximation verhält sich für große Werte der Kopplungskonstanten so wie die Energie der von F.Bopp und H. Maier-Bötzel gefundenen Grundzustandsapproximation (l.c. VI) .Die Grundzustandsapproximation (II,13) ist gekennzeichnet durch die Kopplung von Antipodenimpulsen, die durch die Transformationen (I,11) und (I,12) bewirkt wird. Antipo-

denimpulse nennen wir solche Impulse, die zu gegenüberliegenden Punkten des in sich geschlossenen Impulsraumes gehören, also die Impulse $\vec{h}$ und $\vec{h} + \frac{2}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Kopplung der Antipodenimpulse hat die Absenkung der Energie zur Folge, weswegen Antipodenimpulse auch dynamisch ausgezeichnet scheinen. In Kapitel IV wird die Güte der Grundzustandsapproximation (II,13) noch insofern bestätigt, als es gelingt zu zeigen, daß die Energie des absoluten Grundzustandes für große Werte der Kopplungskonstanten in ihren zu $\frac{\sqrt{2}^7}{L}$ proportionalen Anteilen gegen die Energie des Grundzustandes von H_W^A nämlich $-4WZ^3$ konvergiert. Das ist eine starke Einschränkung, da die Energie des absoluten Grundzustandes für große W gegen irgend einen Wert zwischen $-4WZ^3$ und $-4WZ^3 - \sum_{\vec{k}} 2 \cdot |\vec{k}|$ gehen könnte. Die Abschätzung der Grundzustandsenergie in Kapitel IV basiert auf der Verwendung der in Kapitel III eingeführten , auf H.P.Dürr zurückgehenden, D-Darstellung. Die Transformation, die auf diese Darstellung führt, vertauscht nicht mit der Teilchenzahl, so daß sie schon allein deswegen ganz andere Aspekte der Theorie, die sonst in Störungsrechnungen höchster Ordnung ($\sim Z^3$) erkennbar würden, erkennen läßt. So liefert sie unter Anderem eine einfache Darstellung einer SU(2)-Symmetrie der Theorie mit A-Wechselwirkung, die in der ursprünglichen Darstellung recht versteckt und für die praktische Rechnung unbrauchbar war. Weiter erhalten wir mit Hilfe der D-Darstellung zwei exakte Eigenzustände des gesamten Hamiltonoperators zur Energie $-4WZ^3$ und noch ein ganzes Spektrum höher liegender exakter Eigenzustände , die in der ursprünglichen Darstellung alle die Teilchenzahl $2Z^3$ haben. Für die B-Wechselwirkung ist die Energie des Grundzustandes von H_W^B gleich $-8WZ^3$. Bei dieser Art der Wechsel-

wirkung erlaubt uns die D-Darstellung ein Spektrum von exakten Eigenzuständen , die alle zum Eigenwert $-8WZ^3$ gehören,und "Helizitäten" $-Z^3$, $-Z^3+1$, ...,0,...Z^3-1, Z^3 haben , anzugeben. (Seite 66/67) Von den erhaltenen Eigenzuständen untersuchen wir zwei in Kapitel V gründlicher.Es sind die dem Vakuum $|0\rangle_D$ der D-Darstellung und dem vollkommen besetzten Zustand $\overline{|0\rangle}_D$ der D-Darstellung entsprechenden Zustände. Sie haben die extremen"Helizitäten" $-Z^3$ und Z^3 . Ihre Eigenwerte sind sind $-4WZ^3$ oder $-8WZ^3$ bei A- bzw. B-Wechselwirkung. In Kapitel V finden wir Anregungen dieser Zustände, die exakte Eigenlösungen des Systems sind und zwei freie Neutrinos mit der Bewegungsenergie $|\vec{k}_1| + |\vec{k}_2|$ enthalten. Diese Anregungszustände sind auch exakte Eigenzustände einer (doppelten) Weyl-Gleichung zum Eigenwert $|\vec{k}_1| + |\vec{k}_2|$, so daß wir tatsächlich von zwei freien Neutrinos als exakter Eigenlösung sprechen können. Zugleich stellen wir noch fest, daß von den Zuständen $|0\rangle_D$ und $\overline{|0\rangle}_D$ der D-Darstellung ausgehend, Fermionen mit nicht verschwindender Masse erst nach einer Störung der Ordnung Z^3 erhalten können, während wir für einen anderen Ausgangszustand, der die gleiche Energie $-4WZ^3$ hat, aber die "Helizität" Null, schon bei den einfachsten Anregungen Anregungsenergien wie $\sqrt{\vec{k}^2+m^2}$ erhalten. Leider können wir in diesem Falle keine exakten Eigenzustände angeben. Wir erhalten also, wenn wir von diesen Zuständen ausgehen, völlig verschiedene"Welten", in denen es z.B. keine Fermionen mit Masse gibt oder keine ohne Masse. Dabei setzen wir voraus,daß die sich in der"Welt"abspielenden Prozesse Anregungen von geringer Ordnung verglichen mit Z^3 sind.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Dr. F. Wahl für die vielen klärenden und anregenden Diskussionen herlich danken. Aus den gleichen Gründen bedanke ich mich auch bei Herrn Prof. Dr. F. Bopp, dessen Arbeiten l.c. I, II, III den Anstoß zu dieser Arbeit gaben, und bei Dr. E. G. Weidemann.

A n h a n g

Zur Diskussion des Zustandes $|\vec{F}\rangle$

Wir untersuchen zunächst die Lösbarkeit der Selbstkonsistenzbedingung (I,84). Dabei interessieren wir uns für die Lösungen mit $|\vec{F}'| \sim Z^3$, da $|\vec{F}'|$ nämlich immer nur zusammen mit dem Faktor $c' = \frac{32\pi \cdot 4}{Z^3}$ vorkommt, so daß Beiträge zu $|\vec{F}'|$ in kleinerer Ordnung von Z verschwinden. Statt (I,34) genügt es deshalb die folgende Gleichung zu untersuchen:

$$\vec{F}'^2 = c' \sum_{\vec{k};\, \vec{k} \neq \vec{F}'} \frac{8\pi^2(\vec{k}) \cdot \lambda(\vec{k})}{(\lambda^2(\vec{k}) - c'^2 \vec{F}'^2)^2} \left(\vec{F}'^2 \vec{K}^2 - (\vec{F}'\vec{K})^2 \right) \qquad (A,1)$$

mit Hilfe von (I,73) und (I,76) bringen wir (A,1) auf die folgende Form:

$$|\vec{F}'| = \frac{1}{16c'} \sum_{\vec{k},\, \vec{k} \neq \vec{F}'} \lambda(\vec{k}) \left(1 + \frac{c'^2\vec{F}'^2 - 4\vec{K}^2}{\sqrt{(c'^2\vec{F}'^2 - 4\vec{K}^2)^2 + 16c'^2(\vec{F}'^2\vec{K}^2 - (\vec{F}'\vec{K})^2)}} \right) \qquad (A,2)$$

Eine Division durch $\vec{F}'^2$ ergibt:

$$1 = \frac{c'}{16} \sum_{\vec{k},\vec{k} \neq \vec{F}'} \lambda(\vec{k}) \cdot \frac{1}{c'^2\vec{F}'^2} \cdot \left(1 + \frac{c'^2\vec{F}'^2 - 4\vec{K}^2}{\sqrt{(c'^2\vec{F}'^2 - 4\vec{K}^2)^2 + 16c'^2(\vec{F}'^2\vec{K}^2 - (\vec{F}'\vec{K})^2)}} \right) \qquad (A,3)$$

Die rechte Seite von (A,3) hat ihren größten Wert bei $\vec{F}' = \vec{0}$ und geht für $\vec{F}' \to \infty$ gegen Null. Ihr Wert für $\vec{F}' = \vec{0}$ ist gleich $-\frac{c'}{16} \sum_{\vec{k}} \frac{\sin^2\theta}{|\vec{K}|}$ mit $\sin^2\theta = \frac{\vec{F}'^2\vec{K}^2 - (\vec{F}'\vec{K})^2}{\vec{F}'^2\vec{K}^2}$. Damit hat man als Lösungsbedingung für (A,3)

$$1 < -\frac{c'}{16} \sum_{\vec{k}} \frac{\sin^2\theta}{|\vec{K}|} \qquad (A,4)$$

Als nächstes untersuchen wir den Energieerwartungswert von $|\vec{F}\rangle$

Dazu führen wir den folgenden Zustand ein: $|\vec{\phi}\rangle =$

$$= \prod_{\vec{k};\vec{k}\neq\vec{\phi}} \gamma^{+}_{\beta_1}(\vec{k}) \Big\{ \Big(\frac{2\gamma_3(\vec{k})\,\gamma(\vec{k})\,(\vec{k} - c'^2 \frac{\vec{\phi}\vec{k}}{\lambda^2(\vec{k})}\cdot\vec{\phi}) - i c' \cdot 2\gamma_3(\vec{k})\cdot\vec{\phi}\times\vec{k}}{(\lambda^2(\vec{k}) - c'^2\vec{\phi}^2)} \Big)\cdot\vec{\sigma}\sigma_2\beta_2 +$$

$$+ \gamma_3(\vec{k})\,\beta_3\beta_2\sigma_2 \Big\} \gamma^{+}_{\beta_3}(\vec{k}) \cdot \prod_{\vec{k},\vec{k}\parallel\vec{\phi}} \gamma^{+}_{\beta_3}(\vec{k})\, A(\vec{k})\, \gamma^{+}_{\beta_3}(\vec{k}) \cdot |0\rangle \qquad \text{(A,5)}$$

Dabei ist:

$$A(\vec{k}) = \frac{\vec{k}}{4|\vec{k}|}\cdot\vec{\sigma}\sigma_2\beta_2 + \frac{1}{4}\beta_3\beta_2\sigma_2 \qquad \text{(A,6)}$$

für $4\vec{k}^2 > c'^2\vec{\phi}^2$ und

$$A(\vec{k}) = \Big(\frac{\vec{a}}{4} - i\,\frac{c'\vec{\phi}}{4|c'||\vec{\phi}|}\times\vec{a} \Big)\,\vec{\sigma}\sigma_2\beta_2 \qquad \text{(A,7)}$$

$\vec{a}$: reeller Vektor mit $\vec{a}\,\vec{\phi} = 0$ und $\vec{a}^2 = 1$

für $4\vec{k}^2 < c'^2\vec{\phi}^2$

Es gilt noch die Normbedingung:

$$\gamma_3^2(\vec{k}) = \frac{1}{16}\Big(1 + \frac{4c'^2(\vec{k}^2\vec{\phi}^2 - (\vec{k}\vec{\phi})^2)}{(\lambda^2(\vec{k}) - c'^2\vec{\phi}^2)^2} \Big)^{-1} \qquad \text{(A,8)}$$

und

$$\lambda(\vec{k}) = -\sqrt{\tfrac{1}{2}(c'^2\vec{\phi}^2 + 4\vec{k}^2) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(c'^2\vec{\phi}^2 - 4\vec{k}^2)^2 + 16c'^2\vec{\phi}^2\sin^2\theta\cdot\vec{k}^2}} \qquad \text{(A,9)}$$

Damit errechnen wir den Energieerwartungswert $E(\vec{\phi})$ von $|\vec{\phi}\rangle$.
Wir erhalten, wenn wir einen Beitrag $\sim Z^0W$ vernachlässigen:

$$E(\vec{\phi}) = \sum_{\vec{k}} 16\gamma_3^2(\vec{k})\,\lambda(\vec{k}) +$$

$$+ \frac{32W\cdot 16}{z^3}\Big(\sum_{\vec{k},\vec{k}\neq\vec{\phi}} \frac{(2\gamma_3(\vec{k}))^2\cdot 2c'\cdot\lambda(\vec{k})}{(\lambda^2(\vec{k}) - c'^2\vec{p}^2)^2}\,(\vec{\phi}\,\vec{k}^2 - \vec{k}(\vec{\phi}\vec{k})) + \frac{c'}{8}\sum_{\vec{k},\vec{k}\parallel\vec{\phi}} (c'^2\vec{\phi}^2 - 4\vec{k}^2)\lambda^{-1}(\vec{k})\cdot\vec{\phi} \Big)^2 \qquad \text{(A,10)}$$

Damit die folgende Rechnung übersichtlicher wird, untersuchen wir nur den Anteil von $E(\vec{\phi})$ der $\sim \sqrt{Z}^7$ ist, wir können dann nämlich die Summe über $\vec{h}$ mit $\vec{h} \nparallel \vec{\phi}$ weglassen. Die genauere Analyse unter Mitnahme dieser Terme zeigt übrigens, daß die Resultate, die wir erhalten werden, dann noch bestärkt werden. Wenn wir mit $\vec{h}'$ diejenigen Vektoren bezeichnen, für die gilt $\vec{h}' \times \vec{\phi} \neq \vec{0}$, gilt für $E(\vec{\phi})$:

$$E(\vec{\phi}) = \sum_{\vec{h}'} 16 f_3^2(\vec{h}') \lambda(\vec{h}') + 4c' \left(\sum_{\vec{h}'} \frac{(2 f_3(\vec{h}'))^2 \cdot 2c' \cdot \lambda(\vec{h}')}{(\lambda^2(\vec{h}') - c'^2 \vec{\phi}^2)^2} (\vec{\phi}^2 \vec{K}'^2 - \vec{K}'(\vec{\phi}\vec{K}')) \right)^2 \qquad (A,11)$$

Wie schon gezeigt wurde, ergibt die Summe unter dem Quadrat einen Vektor mit der gleichen Richtung wie $\vec{\phi}$. Wenn wir die Summe mit $\vec{\phi} \cdot |\vec{\phi}|^{-1}$ multiplizieren, erhalten wir also den Betrag des sich aus der Summe ergebenden Vektors. Ersetzen wir sein Quadrat durch das Quadrat seines Betrages, dann erhalten wir: $E(\vec{\phi}) =$

$$= \sum_{\vec{h}'} 16 f_3^2(\vec{h}') \lambda(\vec{h}') + \frac{4c'}{\vec{\phi}^2} \left(\sum_{\vec{h}'} \frac{(2 f_3(\vec{h}'))^2 \cdot \lambda(\vec{h}') \cdot 2c'}{(\lambda^2(\vec{h}') - c'^2 \vec{\phi}^2)^2} (\vec{\phi}^2 \vec{K}'^2 - (\vec{\phi}\vec{K}')^2) \right)^2 \qquad (A,12)$$

Unter Verwendung der Normbedingung können wir dafür schreiben:

$$E(\vec{\phi}) = \sum_{\vec{h}} 16 f_3^2(\vec{h}) \lambda(\vec{h}) + \frac{c'}{16} \cdot \frac{1}{c'^2 \vec{\phi}^2} \left(\sum_{\vec{h}'} (\lambda(\vec{h}') - 16 f_3^2(\vec{h}') \lambda(\vec{h}')) \right)^2 \qquad (A,13)$$

Wir untersuchen nun die Ableitung von $E(\vec{\phi})$ nach $\vec{\phi}^2$:

$$\frac{dE(\vec{\phi})}{d\vec{\phi}^2} = \sum_{\vec{h}} \frac{d}{d\vec{\phi}^2} (f_3^2(\vec{h}) \lambda(\vec{h})) + \left(\frac{d}{d\vec{\phi}^2} \left(\sum_{\vec{h}'} (\lambda(\vec{h}') - 16 f_3^2(\vec{h}') \lambda(\vec{h}')) \right) \right) \cdot$$

$$\cdot \frac{c'}{16 c'^2 \vec{\phi}^2} \cdot \left(\sum_{\vec{h}'} (\lambda(\vec{h}') - 16 f_3^2(\vec{h}') \lambda(\vec{h}')) \right) + \frac{c'}{16} \cdot \left(\sum_{\vec{h}'} (\lambda(\vec{h}') - 16 f_3^2(\vec{h}') \lambda(\vec{h}') \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{d}{d\vec{\phi}^2} \left(\frac{1}{c'^2 \vec{\phi}^2} \cdot \left(\sum_{\vec{h}'} (\lambda(\vec{h}') - 16 f_3^2(\vec{h}') \lambda(\vec{h}')) \right) \right) \right) \qquad (A,14)$$

Für die Berechnung von (A,14) benutzen wir die folgenden Beziehungen:

$$\frac{d}{d\vec{\phi}^2}\left\{\frac{c'}{16}\left(\frac{1}{c'^2\vec{\phi}^2}\left(\sum_{\vec{k}'}(\lambda(\vec{k}')-16\beta_3^2(\vec{k}')\lambda(\vec{k}')\right)\right)\right\}=$$

$$=\frac{c'}{16}\sum_{\vec{k}'}\frac{c'^2}{2\lambda(\vec{k}')c'^2\vec{\phi}^2}\left\{-\frac{1}{2\sqrt{\quad}}\left(c'^2\vec{\phi}^2-4\vec{k}'^2+4\vec{k}'^2\sin^2\theta+\sqrt{\quad}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{4\vec{k}'^2\sin^2\theta}{\sqrt{\quad}^3}\left(16c'^2\vec{\phi}^2\vec{k}'^2-16c'^2\vec{\phi}^2\vec{k}'^2\sin^2\theta+\frac{1}{2}\sqrt{\quad}\cdot(c'^2\vec{\phi}^2+4\vec{k}'^2)\right)\right\} \qquad (A,15)$$

$$\frac{d}{d\vec{\phi}^2}\lambda(\vec{k})=\frac{c'^2}{4\lambda(\vec{k})\sqrt{\quad}}\left(\sqrt{\quad}+c'^2\vec{\phi}^2-4\vec{k}^2+8\sin^2\theta\cdot\vec{k}^2\right) \qquad (A,16)$$

$$\frac{d}{d\vec{\phi}^2}\left(16\beta_3^2(\vec{k})\lambda(\vec{k})\right)=\frac{c'^2\vec{k}^2\sin^2\theta}{\lambda(\vec{k})\sqrt{\quad}^3}\left(-\sqrt{\quad}\cdot(c'^2\vec{\phi}^2+4\vec{k}^2)-(c'^2\vec{\phi}^2+4\vec{k}^2)^2-\right.$$

$$\left.-16c'^2\vec{\phi}^2\vec{k}^2+16c'^2\vec{\phi}^2\vec{k}^2\sin^2\theta\right) \qquad (A,17)$$

dabei ist

$$\sqrt{\quad}=\sqrt{(c'^2\vec{\phi}^2-4\vec{k}^2)^2+16c'^2\vec{\phi}^2\vec{k}^2\sin^2\theta}$$

damit erhlaten wir:

$$\frac{d\,E(\vec{\phi})}{d\,\vec{\phi}^2}=\sum_{\vec{k}}\frac{d}{d\vec{\phi}^2}\left(16\beta_3^2(\vec{k})\lambda(\vec{k})\right)+\frac{c'}{16}\left(\sum_{\vec{k}'}(\lambda(\vec{k}')-16\beta_3^2(\vec{k}')\lambda(\vec{k}')\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\sum_{\vec{k}'}\frac{c'^2}{4\lambda(\vec{k}')c'^2\vec{\phi}^2\sqrt{\quad}}\cdot\left(\underline{\sqrt{\quad}}+c'^2\vec{\phi}^2-4\vec{k}'^2+8\vec{k}'^2\sin^2\theta\right)-\right.$$

$$-\left(\frac{d}{d\vec{\phi}^2}\left(16\beta_3^2(\vec{k}')\lambda(\vec{k}')\right)\cdot\frac{1}{c'^2\vec{\phi}^2}-\frac{c'^2}{4\lambda(\vec{k}')c'^2\vec{\phi}^2\sqrt{\quad}}4\cdot\vec{k}'^2\sin^2\theta-\right.$$

$$-\frac{c'^2}{4\lambda(\vec{k}')c'^2\vec{\phi}^2\sqrt{\quad}}\left(\underline{\sqrt{\quad}}+c'^2\vec{\phi}^2-4\vec{k}'^2\right)+\frac{4\sin^2\theta\cdot\vec{k}'^2\cdot c'^2}{2\lambda(\vec{k}')\sqrt{\quad}^3\cdot c'^2\vec{\phi}^2}\cdot$$

$$\left.\left.\cdot\left(16c'^2\vec{\phi}^2\cdot\vec{k}'^2-16c'^2\vec{\phi}^2\vec{k}'^2\sin^2\theta+\frac{1}{2}\sqrt{\quad}\cdot(c'^2\vec{\phi}^2+4\vec{k}'^2)\right)\right\}\right) \qquad (A,18)$$

Hier ist wesentlich, daß sich die unterstrichenen Terme wegheben, das hat nämlich zur Folge, daß E ($\vec{\Phi}$) sich für große $\vec{\Phi}$ von unten an $8WZ^3$ nähert. Wenn sich diese Terme nicht wegheben würden, hätten wir für große $\vec{\Phi}$ eine Annäherung an $8WZ^3$ von oben. Mit Hilfe von (A,15), (A,16), (A,17) erhalten wir:

$$\frac{\alpha E(\vec{\Phi})}{\alpha \vec{\Phi}^2} = \sum_{\vec{k}} \frac{\alpha}{\alpha \vec{\Phi}^2} \left(16 f_3^2(\vec{k}) \cdot \lambda(\vec{k}) \right) -$$

$$- \frac{c'}{8} \left(\sum_{\vec{k}'} (\lambda(\vec{k}') - 16 f_3^2(\vec{k}') \lambda(\vec{k}') \right) \cdot \frac{1}{c'^2 \vec{\Phi}^2} \cdot \sum_{\vec{k}'} \frac{\alpha}{\alpha \vec{\Phi}^2} \left(16 f_3^2(\vec{k}') \cdot \lambda(\vec{k}') \right) \qquad \text{(A,19)}$$

Da wegen (A,17) $\frac{\alpha}{\alpha \vec{\Phi}^2} \left(16 f_3^2(\vec{k}) \lambda(\vec{k}) \right) > 0$ ist, gilt $\frac{\alpha E(\vec{\Phi})}{\alpha \vec{\Phi}^2} > 0$ für große $\vec{\Phi}$, unabhängig von der Größe von W. Für kleine $\vec{\Phi}$ können wir $\lambda(\vec{k}) - 16 f_3^2(\vec{k}) \lambda(\vec{k})$ durch $- \frac{\sin^2 \theta}{2 |\vec{k}|}$ ersetzen und erhalten das Ergebnis, daß $\frac{\alpha E(\vec{\Phi})}{\alpha \vec{\Phi}^2}$ für kleine $\vec{\Phi}$ kleiner als Null ist, wenn

$$1 < - \frac{c'}{16} \sum_{\vec{k} \neq \vec{0}} \frac{\sin^2 \theta}{|\vec{k}|} \qquad \text{(A,20)}$$

gilt. E ($\vec{\Phi}$) fällt also für kleine $\vec{\Phi}$, wenn [1] für die Lösung $|\vec{F}>$ lösbar ist. Für das Minimum von E ($\vec{\Phi}$) ist $\frac{\alpha E(\vec{\Phi})}{\alpha \vec{\Phi}^2} = 0$. Daraus folgt:

$$c'^2 \vec{\Phi}^2 = \frac{c'}{8} \left(\sum_{\vec{k}} (\lambda(\vec{k}) - 16 f_3^2(\vec{k}) \lambda(\vec{k}) \right) \qquad \text{(A,21)}$$

Da (A,21) gleich der Selbstkonsistenzbedingung (A,2) ist, gilt im Minimum: $|\vec{\Phi}>_{min} = |\vec{F}>$. Daß es sich um ein Minimum handelt sieht man daraus, daß die Extrembedingung (A,21) nur lösbar ist, wenn (A,4) gilt. Dann fällt nämlich E ($\vec{\Phi}$) für kleine $\vec{\Phi}$, während E ($\vec{\Phi}$) für große $\vec{\Phi}$ immer steigt. Da E (0) = $\sum_{\vec{k}} -2|\vec{k}|$ und E (∞) = $8WZ^3$ ist, hat E ($\vec{\Phi}$) also den in den folgenden Abbildungen angegebenen Verlauf.

1) die Selbstkonsistenzbedingung (A,2)

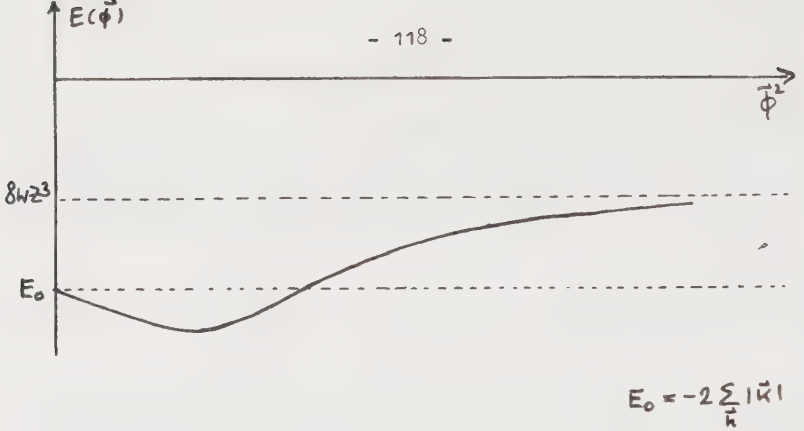


Abb. A 1 Systematischer Verlauf von E ($\vec{\phi}$) für $8WZ^3 > E(0)$

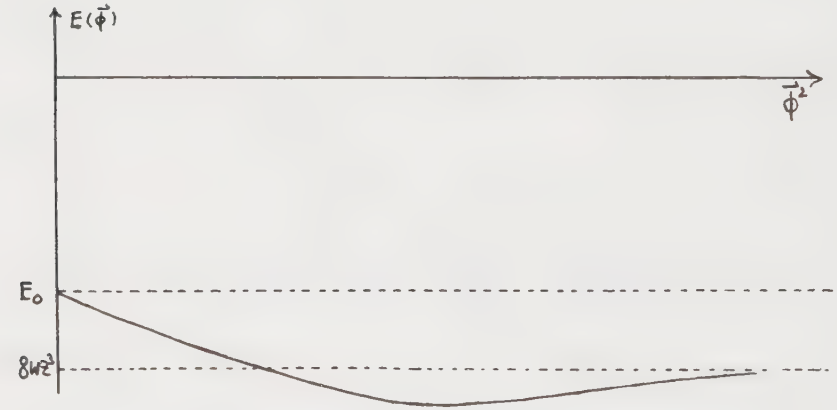


Abb. A 2 Systematischer Verlauf von E ($\vec{\phi}$) für $8WZ^3 < E(0)$

Da $|\vec{F}\rangle$ gleich $|\vec{\phi}\rangle_{min}$ ist, folgt also, daß $\langle\vec{F}|H|\vec{F}\rangle$ immer unterhalb von $-2\sum_k |\vec{k}|$ und $8WZ^3$ liegt, vorausgesetzt, die Selbstkonsistenzbedingung ist erfüllbar, da sonst die Lösung $|\vec{F}\rangle$ nicht existiert (Es sei noch einmal daran erinnert, daß wir für die Lösung $|\vec{F}\rangle$ W kleiner Null angenommen haben).

Anhang B

B1:

Die SU(8)-Transformationen $\psi_{i\mu}(\vec{h}') \to \sum_{\nu} A_{\mu\nu}\psi_{i\nu}(\vec{h}')$ mit $AA^{+}=1$ sind i. a. nicht lokal im Ortsraum, da ihre Wirkung auf verschiedene Punkte $\vec{h}'$ und $\vec{h}'+\begin{pmatrix}0,a\\0,a\\0,a\end{pmatrix}$ i.a. verschieden ist. Die Vektoren $\vec{h}'$ sollen definiert sein wie auf Seite 12 unten. a hat wie üblich die Werte $+\frac{\pi}{2}$ oder $\frac{-\pi}{2}$,mit der Nebenbedingung, daß $\vec{h}'+\begin{pmatrix}0,a\\0,a\\0,a\end{pmatrix}$ aus dem reziproken Gitter ist. Wir wollen noch ein Beispiel für die obige Aussage geben. Sei

$$A_{01}=1 \qquad A_{10}=1$$

$$A_{\mu\mu}=1 \ (\mu\neq 1,0) \qquad A_{\mu\nu}=0 \ \text{sonst} \tag{B1,1}$$

Die Transformation (B1,1) ist eine unitäre Transformation aus der SU(8)-Gruppe. Ihre Wirkungsweise ist die folgende:

$$\psi(\vec{h}) \to \rho_1\sigma_1\psi(\vec{h}+\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}) \quad \text{falls} \quad \vec{h}\in\{\{\vec{h}'\}\cup\{\vec{h}'+\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}\}\}$$

$$\psi(\vec{h}) \to \psi(\vec{h}) \quad \text{falls} \quad \vec{h}\notin\{\{\vec{h}'\}\cup\{\vec{h}'+\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}\}\} \tag{B1,2}$$

Die Übertragung von (B1,2) auf den Ortsraum ergibt eine nicht lokale Transformation.

Die Berechnung der Vertauschungsrelationen der Erzeugenden (I,21) zeigt, daß diese durch die Vertauschungsrelationen der Matrizen $\rho_\mu\sigma_\nu$ (μ, ν haben die Werte 0,1,2,3,4 wobei $\rho_0=\sigma_0=1$ ist) bestimmt sind. Die Matrizen $\rho_\mu\sigma_\nu$ bilden aber eine vierdimensionale Darstellung der U(4), so daß die Erzeugenden (I,21) ,bei denen die Phasentransformation schon weggenommen ist, die einer SU(4) sind.

B2:

Die Energie ist nach (I,39) : $E = \sum_{\vec{h}} \lambda(\vec{h}) + \frac{32W\cdot 16}{z^3} \sum_{\vec{h},\vec{h}'(\vec{h}\neq\vec{h}')} \{(\vec{f}(\vec{h})\times\vec{f}^*(\vec{h}'))\cdot$

$\cdot(\vec{f}(\vec{h}')\times\vec{f}^*(\vec{h}')) - \{\vec{g}(\vec{h})\times\vec{g}^*(\vec{h}))\cdot(\vec{g}(\vec{h}')\times\vec{g}^*(\vec{h}')\}$ (B2,1)

Im vorliegenden Fall gilt $\vec{f}(\vec{h})=\vec{0}$ und $G(\vec{h}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ G_3(\vec{h}) \end{pmatrix}$. Mit (I,48) und der Normbedingung $\vec{y}^2(\vec{h}) + \vec{x}^2(\vec{h}) = \frac{1}{8}$ gilt:

$$\vec{g}(\vec{h})\times\vec{g}^*(\vec{h}) = -\frac{\lambda'(\vec{h})}{8}\frac{G_3(\vec{h})}{|G_3(\vec{h})|}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \text{(B2,2)}$$

Damit und mit $\vec{G}(\vec{h}) = \sum_{(\vec{h}\neq\vec{h}')} \vec{g}(\vec{h}')\times\vec{g}^*(\vec{h}')$ folgt aus (B2,1) :

$$E = \sum_{\vec{h}} \lambda(\vec{h}) + \frac{32W\cdot 16}{z^3}\sum_{\vec{h}}\frac{\lambda'(\vec{h})\,G_3(\vec{h})}{8\cdot|G_3(\vec{h})|}\cdot G_3(\vec{h}) \qquad \text{(B2,3)}$$

Da $G_3(\vec{h})$ rein imaginär ist, folgt:

$$E = \sum_{\vec{h}} \lambda(\vec{h}) - \frac{32W\cdot 2}{z^3}\sum_{\vec{h}} \lambda'(\vec{h})\,|G_3(\vec{h})| \qquad \text{(B2,4)}$$

Daraus wird mit (I,46)

$$E = \left(\sum_{\vec{h}} \lambda'(\vec{h})\cdot\frac{32W\cdot 4}{z^3}\cdot|G_3(\vec{h})|\right) - 8W - \frac{32W\cdot 2}{z^3}\sum_{\vec{h}}\lambda'(\vec{h})\,|G_3(\vec{h})| \qquad \text{(B2,5)}$$

bzw.

$$E = \frac{64W}{z^3}\sum_{\vec{h}}\lambda'(\vec{h})\cdot|G_3(\vec{h})| - 8W \qquad \text{(B2,6)}$$

Wir verwenden $|G_3(\vec{h})| = -\sum_{\vec{h}'\neq\vec{h}}\lambda'(\vec{h}')\cdot\frac{1}{8}$ ((I,52), (I,51)) und erhalten statt (B2,6) :

$$E = -\frac{8W}{z^3}\sum_{\vec{h},\vec{h}'(\vec{h}'\neq\vec{h})}\lambda'(\vec{h})\cdot\lambda'(\vec{h}') - 8W = -\frac{8W}{z^3}\left\{\left(\sum_{\vec{h}}\lambda'(\vec{h})\right)^2 - \sum_{\vec{h}}\lambda'^2(\vec{h})\right\}$$

$$-8W = -\frac{8W}{z^3}\left\{\left(\sum_{\vec{h}}\lambda'(\vec{h})\right)^2 - z^3\right\} - 8W = -\frac{8W}{z^3}\left(\sum_{\vec{h}}\lambda'(\vec{h})\right)^2 ;$$

B3:

Die Selbstkonsistenzbedingungen (I,70) und (I,71) folgen aus der Gleichung: $\vec{F}' = 2 \cdot \sum_{\vec{h}_0} \vec{\pi}(\vec{h}_0) \times \vec{p}(\vec{h}_0) + A$ (B3,1)

$\vec{h}_0$ ist definiert wie auf Seite 24 oben. A soll die Beiträge von den Stellen $\vec{h} \neq \vec{h}_0$ darstellen, da sie höchstens von der Ordnung z^2 sind, sind sie unwesentlich. Aus (B3,1) folgt mit (I,65) und (I,66):

$$\vec{F}' = -2c' \sum_{\vec{h}_0} \frac{(2\gamma_3(\vec{h}_0))^2 \cdot \lambda(\vec{h}_0)}{(\lambda^2(\vec{h}_0) - c'^2\vec{F}'^2)^2} (\vec{F}' \times \vec{\kappa}_0) \times \left(\vec{\kappa}_0 - \frac{c'^2(\vec{F}'\vec{\kappa}_0)}{\lambda^2(\vec{h}_0)}\vec{F}'\right) + A \qquad \text{(B3,2)}$$

bzw.

$$\vec{F}' = 2c' \sum_{\vec{h}_0} \frac{(2\gamma_3(\vec{h}_0))^2 \lambda(\vec{h}_0)}{(\lambda^2(\vec{h}_0) - c'^2\vec{F}'^2)^2} \cdot \vec{\kappa}_0 \times (\vec{F}' \times \vec{\kappa}_0) +$$

$$+ 2c'^3 \sum_{\vec{h}_0} \frac{(2\gamma_3(\vec{h}_0))^2 (\vec{\kappa}_0 \vec{F}')}{(\lambda^2(\vec{h}_0) - c'^2\vec{F}'^2)^2 \lambda(\vec{h}_0)} \cdot (\vec{F}' \times \vec{\kappa}_0) \times \vec{F}' \qquad \text{(B3,3)}$$

Bei der zweiten Summe in (B3,3) ist jeder Summand orthogonal zu $\vec{F}'$, diese Summe kann also keinen Beitrag zu $\vec{F}'$ liefern, sie muß also $\vec{0}$ sein. Mit $\vec{F}' \times \vec{\kappa}_0) \times \vec{F}' = (-\vec{F}' \cdot (\vec{F}'\vec{\kappa}_0) + \vec{\kappa}_0 \vec{F}'^2)$ folgt daraus die Selbstkonsistenzbedingung (I,71). Die verbleibende erste Summe ergibt mit $\vec{\kappa}_0 \times (\vec{F}' \times \vec{\kappa}_0) = \vec{F}' \vec{\kappa}_0^2 - \vec{\kappa}_0(\vec{\kappa}_0 \vec{F}')$ die Selbstkonsistenzgleichung (I,70).

B4:

(I,72) folgt aus der Gleichung:

$$\vec{G}' = 2 \cdot \sum_{\vec{h}} \vec{\pi}(\vec{h}) \times \vec{p}(\vec{h}) = 2 \cdot \sum_{\vec{h}} \begin{pmatrix} x_2(\vec{h})\gamma_3(\vec{h}) \\ -x_1(\vec{h})\gamma_3(\vec{h}) \\ x_1(\vec{h})\gamma_2(\vec{h}) - x_2(\vec{h})\gamma_1(\vec{h}) \end{pmatrix} \qquad \text{(B4,1)}$$

$\vec{\varkappa}(\vec{k})$ und $\vec{\gamma}(\vec{k})$ errechnen wir aus (I,40) in Abhängigkeit von $\gamma_3(\vec{k})$.

Man erhält:

$$\varkappa_1(\vec{k}) = \frac{\lambda(\vec{k})\,\gamma_3(\vec{k})\,c'\,\sigma_2'}{(\lambda^2(\vec{k}) - c'^2\sigma_3'^2)} \quad ; \quad \varkappa_2(\vec{k}) = -\frac{\lambda(\vec{k})\,c'\,\sigma_1'\,\gamma_3(\vec{k})}{(\lambda^2(\vec{k}) - c'^2\sigma_3'^2)}$$

$$\varkappa_3(\vec{k}) = 0 \quad ; \quad \gamma_3(\vec{k}) = \gamma_3(\vec{k})$$

$$\gamma_1(\vec{k}) = -\frac{c'^2\sigma_1'\,\sigma_3'\,\gamma_3(\vec{k})}{(\lambda^2(\vec{k}) - c'^2\sigma_3'^2)} \quad ; \quad \gamma_2(\vec{k}) = -\frac{c'^2\sigma_2'\,\sigma_3'\,\gamma_3(\vec{k})}{(\lambda^2(\vec{k}) - c'^2\sigma_3'^2)} \qquad \text{(B4,2)}$$

mit (B4,1) und (B4,2) folgt unmittelbar (I,72).

B5:

(I,73) folgt direkt aus $\vec{\varphi}^2(\vec{k}) + \vec{\pi}^2(\vec{k}) + \vec{\varkappa}^2(\vec{k}) + \vec{\gamma}^2(\vec{k}) = \frac{1}{\delta}$ unter Verwendung von (I,65), (I,66), (B4,2) und (I,69).

B6:

Begründung für die Interpretation der $\lambda(\vec{k})$ als Einteilchenenergien.

Für diese Interpretation der $\lambda(\vec{k})$ spricht einmal die Tatsache, daß sie zur Gesamtenergie in der Form $\sum_{\vec{k}} \lambda(\vec{k})$ beitragen. Die Summation kann man auch als Summation über die in dem Zustand $|\vec{f}\rangle$ enthaltenen Teilchen auffassen. Ein weiterer wesentlicher Grund für unsere Interpretation der $\lambda(\vec{k})$ ist der Folgende. Wenn wir die Energien von Anregungen des Zustandes $|\vec{f}\rangle$ berechnen, so erhalten wir Anregungsenergien, die im Wesentlichen von der Form $|\lambda(\vec{k}_1)| + \cdots\cdots + |\lambda(\vec{k}_n)|$ sind, da sich die restlichen Energiebeiträge (Einbettungsenergien) bei Anregungen von geringer Ordnung nur unwesentlich ändern.

Beim Zustand $|\varphi\rangle_{II}$ haben wir die gleichen Verhältnisse. Auch hier

erhalten wir Anregungsenergien, die durch die Einteilchenenergien $\sqrt{\vec{n}^2 + m^2}$ bestimmt werden, während die restlichen Energiebeiträge bei geringer Ordnung der Anregung unwesentlich sind. In diesem Sinne können wir auch näherungsweise von Fermionen mit Masse m sprechen.

Anhang C

C1:

Die Herleitung der Relationen (IV,26) und (IV,27).

Sei $|\psi_0\rangle$ eine Lösung des Variationsproblems $\operatorname{Max}_{|\psi\rangle} |\langle\psi| H'^{(1)}_{Bew} |\psi\rangle|$

Bei der Variation nach den Zuständen $|\psi\rangle$ müssen u.U. noch Nebenbedingungen berücksichtigt werden. Sei nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\langle\psi_0| H'^{(1)}_{Bew} |\psi_0\rangle < 0$ (Da $H'^{(1)}_{Bew}$ hermitesch ist, muß der Erwartungswert reell sein.) Wir bilden nun den Erwartungswert für den Operator $-\frac{i\sqrt{2}}{2L} \sum_{(alle)\vec{n},i} \psi'^{+}(\vec{n})\, \sigma_i\, (\psi'(\vec{n}+\varepsilon_i) - \psi'(\vec{n}-\varepsilon_i))$ im Zustand $|\psi_0\rangle$.

$$\langle\psi_0| - \frac{i\sqrt{2}}{2L} \sum_{(alle)\vec{n},i} \psi'^{+}(\vec{n})\, \sigma_i\, (\psi'(\vec{n}+\varepsilon_i) - \psi'(\vec{n}-\varepsilon_i)) |\psi_0\rangle =$$

$$= \langle\psi_0| H'^{(1)}_{Bew} |\psi_0\rangle + \langle\psi_0| Rest |\psi_0\rangle \qquad (C1,1)$$

Für den Fall, daß $\langle\psi_0| Rest |\psi_0\rangle \leq 0$ ist, ist (IV,26) erfüllt. (Man beachte, daß $Rest^{+} = Rest$ gilt). Sei nun $\langle\psi_0| Rest |\psi_0\rangle > 0$. Aus (IV,9) entnehmen wir, daß der Operator $H'^{(1)}_{Bew}$ nur aus solchen Termen $\psi'^{+}(\vec{n})\, \sigma_i\, \psi'(\vec{n} \pm \varepsilon_i)$ besteht, bei denen $\vec{n}$ und $\vec{n} \pm \varepsilon_i$ einer der beiden folgenden Relationen genügen:

$$\text{entweder} \quad \vec{n} \in \{\vec{n}_1, \ldots, \vec{n}_M\} \wedge \vec{n} \pm \varepsilon_i \in \{\vec{n}_1, \ldots, \vec{n}_M\}$$

$$\text{oder} \quad \vec{n} \notin \{\vec{n}_1, \ldots, \vec{n}_M\} \wedge \vec{n} \pm \varepsilon_i \notin \{\vec{n}_1, \ldots, \vec{n}_M\} \qquad (C1,2)$$

Entsprechend setzt sich der Operator Rest aus Termen $\psi'^{+}(\vec{n})\sigma_i\psi'(\vec{n}\pm e$ zusammen, wobei entweder

$$\vec{n} \in \{\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_M\} \quad \wedge \quad \vec{n} \pm e_i \notin \{\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_M\}$$

oder $$\vec{n} \notin \{\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_M\} \quad \wedge \quad \vec{n} \pm e_i \in \{\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_M\} \qquad (C1,3$$

ist. Die unitäre Transformation

$$\psi''(\vec{n}) = \psi'(\vec{n}) \qquad \vec{n} \notin \{\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_M\}$$

und $$\psi''(\vec{n}) = -\psi'(\vec{n}) \qquad \vec{n} \in \{\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_M\} \qquad (C1,4$$

wollen wir im weiteren V nennen. Nun bilden wir den Erwartungswert von $-i\frac{\sqrt{2}}{2L}\sum_{(alle)\vec{n},i}\psi'^{+}(\vec{n})\sigma_i\,(\psi'(\vec{n}+e_i)-\psi'(\vec{n}-e_i))$ mit dem Zustand $V|\psi_0\rangle$.
Wir erhalten:

$$\langle\psi_0|V^{+}\Big\{-\frac{i\sqrt{2}}{2L}\sum_{(alle)\vec{n},i}\psi'^{+}(\vec{n})\sigma_i\,(\psi'(\vec{n}+e_i)-\psi'(\vec{n}-e_i))\Big\}V|\psi_0\rangle =$$

$$= \langle\psi_0|V^{+}H'^{(1)}_{Bew}V|\psi_0\rangle + \langle\psi_0|V^{+}Rest^{+}V|\psi_0\rangle =$$

$$= \langle\psi_0|H'^{(1)}_{Bew}|\psi_0\rangle - \langle\psi_0|Rest^{+}|\psi_0\rangle \qquad (C1,5$$

Dabei haben wir die folgenden Relationen berücksichtigt:

$$V^{+}H'^{(1)}_{Bew}V = H'^{(1)}_{Bew} \quad ; \quad V^{+}Rest^{+}V = -Rest^{+} \qquad (C1,6$$

Da wir $\langle\psi_0|H'^{(1)}_{Bew}|\psi_0\rangle < 0$ und $\langle\psi_0|Rest^{+}|\psi_0\rangle > 0$ vorausgesetzt haben, liegt nun wegen (C1,5) der Erwartungswert des vollständigen Operators unter dem von $H'^{(1)}_{Bew}$ und damit ist (IV,26) bewiesen.

Die Relation (IV,27) läßt sich auf die gleiche Weise verifizieren. Der Unterschied ist nur der , daß die Transformation V den Operator $H'^{(2)}_{Bew}$ nach $-H'^{(2)}_{Bew}$ überführt, während der sich bei dieser Rechnung e

gebende Restoperator invariant bleibt. Wenn wir nun noch anschliessend die folgende Transformation

$$\psi'(\vec{n}) = \beta_3 \psi'''(\vec{n}) \qquad (C1,7)$$

ausführen, die sowohl $H^{(2)}_{Bew}$ als auch den Restoperator in ihr Negatives überführt, dann haben wir die gleichen Verhältnisse wie bei der Ableitung von (IV,26) , so daß wir auf die Ausführung des Beweises von (IV,27) verzichten können.

C2:

Eine andere Abschätzung für $|'\langle\varphi^{(m)}|H'^{(2)}_{Bew}|\varphi^{(m)}\rangle'|$.

Da wir eine obere Grenze für $|'\langle\varphi^{(m)}|H'^{(2)}_{Bew}|\varphi^{(m)}\rangle'|$ suchen, können wir wegen (IV,27) statt dessen den Erwartungswert $|'\langle\varphi^{(m)}|-\frac{i\sqrt{2}}{2\ell}\cdot\sum_{(alle)\vec{n},i}\{\psi'^{+}(\vec{n})\sigma_i\sigma_2\beta_1\psi'^{\#}(\vec{n}+\ell_i)-\psi'^{T}(\vec{n}+\ell_i)\beta_1\sigma_2\sigma_i\psi'(\vec{n})\}|\varphi^{(m)}\rangle'|$ abschätzen. Wir nehmen nun wieder eine Zerlegung von $|\varphi^{(m)}\rangle'$ gemäß (IV,32) vor und suchen eine obere Grenze für

$$|'\langle\varphi^{(m)}_{2v+2}|-\frac{i\sqrt{2}}{2\ell}\sum_{(alle)\vec{n},i}\{\psi'^{+}(\vec{n})\sigma_i\sigma_2\beta_1\psi'^{\#}(\vec{n}+\ell_i)-\psi'^{T}(\vec{n}+\ell_i)\beta_1\sigma_2\sigma_i\psi'(\vec{n})\}|\varphi^{(m)}_{2v}\rangle'| \qquad (C2,1)$$

Der Operator $\left(-\frac{i\sqrt{2}}{2\ell}\sum_{(alle)\vec{n},i}\psi'^{+}(\vec{n})\sigma_i\sigma_2\beta_1\psi'^{\#}(\vec{n}+\ell_i)\right)+H.c.$ hat eine einfache Impulsdarstellung. Sie ist in (IV,18) angegeben. Mit der unitären Transformation

$$\psi'(\vec{n}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi''(-\vec{n}) + i\beta_3\psi''(\vec{n})\right) \qquad (C2,2)$$

wird die Impulsdarstellung noch einfacher. Der Operator hat dann die Form:

$$\frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\{\psi''^{+}(\vec{k})\vec{\sigma}\sigma_2\beta_2\psi''^{\#}(\vec{k}) + \psi''^{T}(\vec{k})\beta_2\sigma_2\vec{\sigma}\psi''(\vec{k})\}\vec{k}\,; \quad \vec{k}=\frac{\sqrt{2}}{\ell}\sin\frac{2\pi\vec{k}}{2} \qquad (C2,3)$$

Wir nennen den Operator (C2,3) $\overline{H}_{Bew}$. Da $\overline{H}_{Bew}$ im Impulsraum dia-

gonal ist, wird die Abschätzung von $|'\langle\varphi^{(m)}_{2\nu+2}|\,\overline{H}_{Bew}\,|\varphi^{(m)}_{2\nu}\rangle'|$ recht einfach. Wir zerlegen $|\varphi^{(m)}_{2\nu}\rangle'$ und $|\varphi^{(m)}_{2\nu+2}\rangle$ nach Produktzuständen im Impulsraum.

$$|\varphi^{(m)}_{2\nu}\rangle' = \sum a_i\,|\pi^{2\nu}_i\rangle$$

$$|\varphi^{(m)}_{2\nu+2}\rangle = \sum b_k\,|\pi^{2\nu+2}_k\rangle \qquad \text{(C2,4)}$$

mit: $\left(\sum_{\vec h}\varphi'^{+}(\vec h)\varphi'(\vec h)\right)|\pi^{2\nu}_i\rangle = 2\nu\cdot|\pi^{2\nu}_i\rangle$

$\left(\sum_{\vec h}\varphi'^{+}(\vec h)\varphi'(\vec h)\right)|\pi^{2\nu+2}_k\rangle = (2\nu+2)|\pi^{2\nu+2}_k\rangle$ } für jedes i und k

und für jedes $\vec h$, i , k ;

$$\varphi'^{+}(\vec h)\varphi'(\vec h)\,|\pi^{2\nu}_i\rangle = n_i(\vec h)\,|\pi^{2\nu}_i\rangle$$

$$\varphi'^{+}(\vec h)\varphi'(\vec h)\,|\pi^{2\nu+2}_k\rangle = m_k(\vec h)\,|\pi^{2\nu+2}_k\rangle$$

$n_i(\vec h)$ und $m_k(\vec h)$ ganzzahlig (0,1,2,3,4) (C2,5)

Die einzelnen Punkte $\vec h$ sind also mit homogenen Polynomen in den Operatoren $\varphi^{+}_i(\vec h)$ besetzt. Außerdem gilt noch:

$$\langle\pi^{2\nu}_i\,|\,\pi^{2\nu}_{i'}\rangle = \delta_{ii'} \quad ; \quad \langle\pi^{2\nu+2}_k\,|\,\pi^{2\nu+2}_{k'}\rangle = \delta_{kk'} \qquad \text{(C2,6)}$$

Man kann nun leicht die folgende Relation ableiten.

$$|\langle\pi^{2\nu(+2)}_i\,|\,\varphi''^{T}(\vec h)\beta_2\sigma_2\vec\sigma\vec k\,\varphi''(\vec h)\;\varphi''^{+}(\vec h)\vec\sigma\sigma_2\vec k\beta_2\varphi''^{\#}(\vec h)\,|\pi^{2\nu(+2)}_i\rangle| \le 8\vec k^2 \qquad \text{(C2,7)}$$

Das heißt ein Basisvektor (mit der Norm 1) hat nach Anwendung eines Summanden von $\overline{H}_{Bew}$ eine Norm kleiner oder gleich $\sqrt{8\vec k^2}$. Die Gleichheit gilt, wenn der Punkt $\vec h$ in $|\pi^{2\nu(+2)}_i\rangle$ garnicht oder in der Form $\varphi''^{+}(\vec h)\,\vec\sigma\sigma_2\beta_2\vec k\,\varphi''^{\#}(\vec h)$ besetzt ist. Bei einfacher Besetzung $(\vec a(\vec h)\cdot\varphi^{+}(\vec h))$ hat die linke Seite von (C2,7) z.B. den Wert $4k^2$. Bei Anwendung des gesamten Operators $\overline{H}_{Bew}$ auf einen Zustand $|\pi^{2\nu(+2)}_i\rangle$ geht dieser in eine Summe von lauter orthogonalen Vektoren über, wobei für jeden einzelnen (C2,7) gilt. Damit

hat $|\pi_i^{2\nu\,(+2)}\rangle$ nach Anwendung von $\bar{H}_{Bew}$ eine Norm $\leq \frac{1}{2}\sqrt{8\vec{k}^2}$.
Die Regeln für die Abschätzung von $|'\langle\varphi_{2\nu+2}^{(m)}|\bar{H}_{Bew}|\varphi_{2\nu}^{(m)}\rangle'|$ sind die gleichen wie sie in Kapitel IV vorgeführt wurden. Die wesentlichen Tatsachen sind: Bei Anwendung von $\bar{H}_{Bew}$ geht ein Basisvektor $|\pi_i^{2\nu}\rangle$ in eine Summe von höchstens Z^3 orthogonalen Vektoren $|\tau_\kappa^{2\nu+2}\rangle$ über, deren Normen durch die Werte von $\sqrt{8\vec{k}^2}$ begrenzt werden. Der gleiche Vektor kann bei Anwendung von $\bar{H}_{Bew}$ auf beliebige Basisvektoren $|\pi_i^{2\nu}\rangle$ höchstens m-mal erhalten werden. Damit können wir nun die Rechnungen (IV,37) bis (IV,44) direkt auf den vorliegenden Fall anwenden und erhalten:

$$|'\langle\varphi_{2\nu+2}^{(m)}|\bar{H}_{Bew}|\varphi_{2\nu}^{(m)}\rangle'| \leq Min\left\{\frac{1}{2}\sqrt{m}\cdot\sqrt{8\cdot\sum_{\vec{k}}\vec{k}^2}\;,\;\frac{1}{2}\sqrt{Z^3}\sqrt{8\sum_{\vec{k}}\vec{k}^2}\right\} \qquad (C2,8)$$

und damit:

$$|'\langle\varphi^{(m)}|\bar{H}_{Bew}|\varphi^{(m)}\rangle'| \leq Min\left\{\sqrt{m}\cdot\sqrt{8\sum_{\vec{k}}\vec{k}^2}\;,\;\sqrt{Z^3}\sqrt{8\sum_{\vec{k}}\vec{k}^2}\right\} \qquad (C2,9)$$

Mit $\sum_{\vec{k}}\vec{k}^2 = \frac{3}{2}Z^3$ schreiben wir statt (C2,9)

$$|'\langle\varphi^{(m)}|\bar{H}_{Bew}|\varphi^{(m)}\rangle'| \leq Min\left\{\frac{\sqrt{2}}{L}\sqrt{12mZ^3}\;,\;\frac{\sqrt{2}}{L}\sqrt{12}\cdot Z^3\right\} \qquad (C2,10)$$

C3:

Der Grund dafür ist der, daß man die Trennung statt an der Stelle $\frac{m_0}{2}$ an irgend einer anderen Stelle, z.B. $\frac{m_0}{3}$, vornehmen kann ohne daß sich wesentliche Änderungen ergeben. Die Anzahl der Trennungsmöglichkeiten ist damit $\sim Z^3$.

Literaturangabe

I) F. Bopp Z. Physik 200 (1967) S. 117

II) F. Bopp Z. Physik 200 (1967) S. 133

III) F. Bopp Z. Physik 200 (1967) S. 142

IV) E. G. Weidemann und F. Bopp Z. Physik 204 (1967) S. 311

V) F. Wahl und D. Stocker Allgemeinster Produktansatz im Gitterraum München 1969

VI) F. Bopp und H. Maier-Bötzel Grundzustand und globale Anregungen einer Spinorfeldtheorie vom Heisenbergtyp im Gitterraum mittels umgekehrter Störungsrechnung. München 1970

VII) H. P. Dürr Zeitschrift für Naturforschung 16 a (1961) S. 327

Lebenslauf

Am 29.3.1942 wurde ich, Hansjörg Frank, in Starnberg als Sohn des damaligen Verwaltungsangestellten Johann Frank und seiner Ehefrau Alberta Frank, geb. Althammer, geboren. 1946 zog meine Familie nach Augsburg um, wo ich von 1948 bis 1952 die Stadtpfleger-Anna-Volksschule besuchte. Im Jahre 1952 trat ich in das staatliche Realgymnasium Augsburg ein, wo ich 1961 das Abitur ablegte. Im Wintersemester 1961/62 begann mein Studium an der Universität München, das ich im Sommersemester 1967 mit dem Staatsexamen in den Fächern Physik/Mathematik abschloß. Nach meinem Staatsexamen war ich wissenschaftliche Hilfskraft, bzw. Mitarbeiter am Institut für theoretische Physik der Universität München, wo auch diese Arbeit entstand.